ФГОС ООО

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

9 класс

Часть 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮВЕНТА

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

9 класс

Часть 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮВЕНТА
Москва
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
А 45

Образовательная система «Школа 2000...»

**Непрерывный курс математики для дошкольников,
начальной и средней школы «Учусь учиться»**

Научный руководитель **— Л. Г. Петерсон,**
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г., Агаханов Н. Х., Петрович А. Ю., Подлипский О. К., Рогатова М. В., Трушин Б. В.
А 45 Алгебра: 9 класс: В 2 ч. Ч. 1 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : Издательство «Ювента», 2017. — 176 с. : ил.

ISBN 978-5-85429-645-8 (2-й завод)

Учебник предназначен для изучения школьного курса алгебры 9 класса на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях. Ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование культуры исследовательской и проектной деятельности, умения учиться и готовности к саморазвитию.

Издание содержит разноуровневые задания, позволяющие сформировать прочную систему математических знаний, соответствующих современным требованиям ГИА, ЕГЭ и дающих возможность системной и качественной подготовки учащихся к математическим конкурсам и олимпиадам (на уроках и во внеурочной деятельности).

Реализует дидактическую систему деятельностного метода Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Является составной частью непрерывного курса математики «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и средней школы.

Может использоваться во всех типах школ и для индивидуального изучения курса алгебры 9 класса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-85429-645-8 (2-й завод)

Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

□ – задания базового уровня,

□ – более сложные задания по новым темам и темам повторения,

□* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

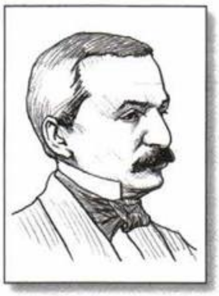
■ – завершение доказательства теоремы,

* * * – материал для тех, кому интересно.

Глава 1
Развитие математической теории

§ 1. Теория множеств

1. Основные понятия теории множеств. Числовые множества



Бог создал натуральные числа; все остальное — дело рук человеческих.

Леопольд Кронекер (1823–1891), немецкий математик

Любая наука в своем развитии стремится к обобщению и систематизации знаний. Одним из наиболее общих математических понятий, позволяющих выявить общие свойства объектов из самых разных областей знаний – математики и физики, химии и биологии, экономики, лингвистики и др., является понятие *множества*.

С начальными представлениями о множествах мы познакомились еще в младших классах школы, а затем работали с множествами чисел, функций и геометрических фигур, слов и предложений, растений и животных и др. Мы использовали отношения и операции над множествами для обоснования суждений, решения логических задач, выявления аналогии свойств объектов различной природы. Для дальнейшего движения вперед уточним свои представления о теоретико-множественных понятиях и познакомимся с новыми.

Сформулируем основные понятия теории множеств, начиная с уточнения понятия множества. В современной математике **множеством** называют любую совокупность произвольных объектов. Эти объекты называют **элементами множества**.

Приведем примеры различных множеств:

1) B – множество всех учеников класса; его элементы – все ученики данного класса;

2) C – множество всех книг в школьной библиотеке; его элементы – все книги библиотеки;

3) N – множество натуральных чисел; его элементы – все натуральные числа;

4) A – множество всех треугольников на плоскости; его элементы – все треугольники на плоскости.

Для обозначения того факта, что объект a является или не является элементом множества A, мы применяем запись $a \in A$ или $a \notin A$. Например, для множества натуральных чисел верно: $3 \in N$; $\frac{1}{2} \notin N$. Такую же запись можно использовать и для нечисловых множеств. Так, если A – множество произведений А.С. Пушкина, a – роман «Евгений Онегин», b – роман «Война и мир», то $a \in A$, $b \notin A$.

Один или несколько элементов, принадлежащих множеству, можно рассматривать как еще одно множество, тогда оно будет подмножеством исходного множества.

Определение 1. Множество A называется **подмножеством** множества B, если каждый элемент A является также элементом B.

Мы обозначаем это следующим образом: $A \subset B$, а читаем «множество A содержится в множестве B» или «множество B включает множество A» и т.п.

Приведем примеры подмножеств различных множеств.

1) $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел; $\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел;

2) $B \subset A$, где A – множество точек некоторого прямоугольника; B – множество вершин этого прямоугольника;

3) $B \subset C$, где C – множество учеников данного класса; B – множество учеников данного класса с фамилией Иванов.

В случае, если в классе нет учеников с фамилией Иванов, B будет являться примером пустого множества.

Определение 2. Множество называется **пустым**, если оно не содержит ни одного элемента (обозначаем знаком $\varnothing$).

Считается, что пустое множество является подмножеством любого множества. Кроме того, любое множество можно считать своим же подмножеством. Зафиксируем эти факты в виде свойства.

Свойство 1. Любое множество A (кроме пустого) имеет хотя бы два подмножества: пустое множество $\varnothing$ и само себя – A.

$$\forall A\colon \varnothing \subset A,\ A \subset A.$$

Для множеств и их подмножеств выполняется еще одно свойство (транзитивность включения множеств).

Свойство 2. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Доказательство:

Пусть элемент $a \in A$. Так как $A \subset B$, то $a \in B$; так как $B \subset C$, то $a \in C$. Итак, любой элемент множества A является также элементом C; значит $A \subset C$. ■

Отношения между множествами мы иллюстрируем диаграммами Эйлера–Венна. Только что доказанное свойство 2 становится очевидным из рисунка 1.

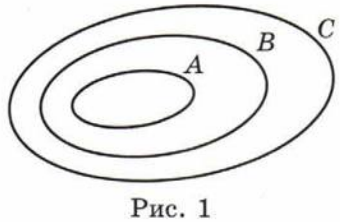


Рис. 1

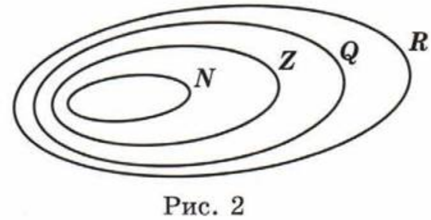


Рис. 2

Подобное отношение связывает известные нам *числовые* множества, которые мы постепенно открывали для себя, расширяя понятие числа (от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным, от рациональных к действительным). Их диаграмма изображена на рисунке 2.

Пример 1.

Опишите, как на диаграмме, изображенной на рис. 2, расположены числа: 2; $\frac{77}{11}$; -4; $\frac{1}{2}$; 3,(01); $\sqrt{100}$; $\sqrt{6}$; $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5}$; 0,123456789101112... (после запятой выписаны подряд все натуральные числа).

Решение:

1) $2 \in \boldsymbol{N}$.

2) $\frac{77}{11} = 7$, $\frac{77}{11} \in \boldsymbol{N}$.

3) $-4 \notin \boldsymbol{N}$, $-4 \in \boldsymbol{Z}$.

4) $\frac{1}{2} \notin \boldsymbol{Z}$; $\frac{1}{2} \in \boldsymbol{Q}$.

5) Мы знаем, что любая бесконечная периодическая дробь может быть записана в виде рационального числа, поэтому $3{,}(01) \in \boldsymbol{Q}$. При этом $3{,}(01) \notin \boldsymbol{Z}$.

6) $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{100} \in \boldsymbol{N}$.

7) $\sqrt{6}$ – иррациональное – не принадлежит $\boldsymbol{Q}$; $\sqrt{6} \in \boldsymbol{R}$.

8) $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5} = \frac{3-1}{5} = 0{,}4$, значит, $\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{5} \in \boldsymbol{Q}$. При этом это число не принадлежит множеству целых чисел.

9) Эта дробь не является периодической. Значит, это число не является рациональным и $0{,}123456789101112... \in \boldsymbol{R}$.

Теперь уточним еще одно определение, касающееся отношений между несколькими множествами.

Определение 3. Два множества A и B называются **равными**, если $A \subset B$ и одновременно $B \subset A$ (то есть каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A; иными словами это означает, что A и B – это одно и то же множество).

Для обозначения равенства множеств применяется естественная запись $A = B$. Рассмотрим пример применения данного определения.

Пример 2.

Даны два множества $A = \{1{,}(09);\ 0{,}11(2);\ 0{,}55;\ 1{,}775\}$ и $B = \{\frac{12}{11};\ \frac{101}{900};\ \frac{11}{20};\ \frac{71}{40}\}$. Являются ли эти множества равными?

Решение:

1) Представим десятичные дроби множества A в виде обыкновенных.

- Пусть $x = 1{,}(09)$, тогда $100x = 109{,}(09)$.

  Значит, $100x - x = 109{,}09... - 1{,}09... \Leftrightarrow 99x = 108 \Leftrightarrow x = \frac{108}{99} = \frac{12}{11}$.

  Получили $1{,}(09) = \frac{12}{11}$ и является элементом множества B.

- Пусть $x = 0{,}11(2)$, тогда $100x = 11{,}(2)$ и $10 \cdot 100x = 112{,}(2)$.

  Значит, $1000x - 100x = 112{,}2... - 11{,}2... \Leftrightarrow 900x = 101 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x = \frac{101}{900}$; $0{,}11(2) \in B$.

- $0{,}55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$; $0{,}55 \in B$.

- $1{,}775 = \frac{1575}{1000} = \frac{355}{200} = \frac{71}{40}$; $1{,}775 \in B$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,12 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{11} & 1{,}0909... \\
-\,100 & \\
\underline{99} & \\
-\,100 & \\
\underline{99} & \\
1... &
\end{array}
$$

2) Так как каждый элемент A является также элементом B и каждый элемент B является также элементом A, эти множества равны.

Отметим, что для доказательства равенства мы могли обыкновенные дроби из множества B записывать в виде десятичных. Так, например, разделив числитель на знаменатель дроби $\frac{12}{11}$, получили бы, что $\frac{12}{11} = 1{,}(09)$.

Ответ: $A = B$.

Теперь зафиксируем еще несколько свойств множеств, связанных с их равенством.

Свойство 3. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Свойство 4. Если $A \subset B$ и $B = C$, то $A \subset C$.

Свойство 3 верно, так как из первых двух равенств следует, что все множества совпадают и поэтому $A = C$. Свойство 4 вытекает из свойства 2 (так как равенство множеств является частным случаем их включения).

Перейдем к важнейшему понятию теории множеств – **соответствию между множествами** (закону или правилу, по которому некоторым элементам множества A ставится в соответствие один или несколько элементов множества B).

Для примера рассмотрим соответствие между множеством учеников школы (A) и множеством билетов, заказанных школой на один из театральных спектаклей (B). Ситуацию, когда какие-то из учеников школы (возможно, и не все) приобрели один или несколько билетов, можно рассматривать как задание соответствия между множествами A и B.

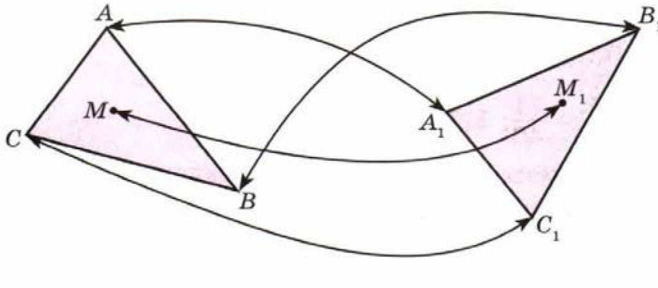
Если же каждый ученик приобрел ровно один билет и все билеты, заказанные школой, оказались раскуплены учениками, можно говорить о взаимно однозначном соответствии между множеством A и B.

Определение 4. Соответствие между множествами A и B называется **взаимно однозначным**, если *каждому* элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, и обратно, каждому элементу множества B при этом соответствует ровно один элемент множества A.

Рассмотрим примеры соответствий между множествами и установим, какие из них будут взаимно однозначными.

1) Пусть A – множество учеников данного класса, $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел. Соответствие между A и $\boldsymbol{N}$, при котором каждому ученику класса ставится в соответствие год его рождения, не является взаимно однозначным. Действительно, каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества $\boldsymbol{N}$, а вот *обратное* не верно. Во-первых, потому, что не все элементы множества $\boldsymbol{N}$ при этом задействованы, а, во-вторых, потому, что многие ученики класса имеют один и тот же год рождения.

2) Соответствие между точками двух равных треугольников на плоскости, осуществляемое при соответствующем движении плоскости, переводящем один треугольник в другой, является взаимно однозначным.



3) Соответствие между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел и множеством четных натуральных чисел, осуществляемое по правилу $n \to 2n$ (то есть каждому числу n соответствует число $2n$, а именно $1 \to 2$; $2 \to 4$; $3 \to 6$ и т.д.) и обратно $2n \to n$, является взаимно однозначным.

Понятие взаимно однозначного соответствия дает нам возможность сравнивать множества.

Определение 5. Два множества A и B называются **эквивалентными** (равномощными), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Ясно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. С бесконечными множествами дело обстоит более сложно. Так, рассмотренный нами выше пример соответствия между множеством N и множеством четных натуральных чисел говорит о том, что эти множества эквивалентны, но при этом, как это ни странно, одно из них является подмножеством другого.

Рассмотрим еще один подобный пример.

Пример 3.

Являются ли множество натуральных чисел и множество целых чисел эквивалентными?

Решение:

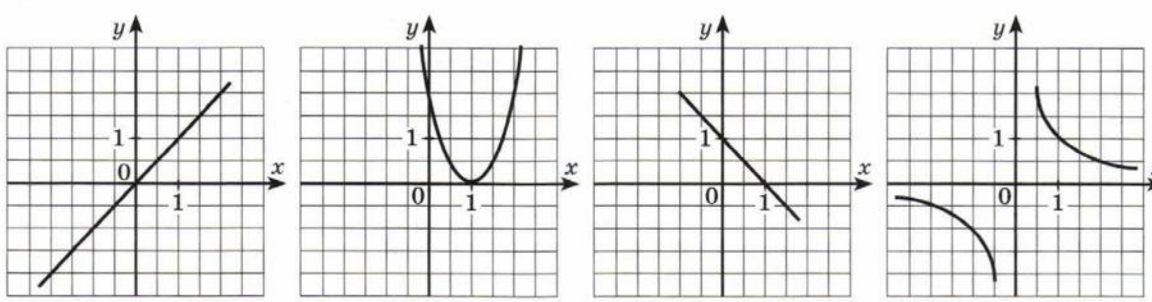
Поставим в соответствие каждому натуральному числу n число $z_n = \frac{(-1)^n}{2}\left(n - \frac{1-(-1)^n}{2}\right)$.
Если n – четное, то $z_n = \frac{n}{2}$; если n – нечетное, то $z_n = -\frac{1}{2}(n-1)$.

Итак, $1 \to 0$; $2 \to 1$; $3 \to -1$; $4 \to 2$; $5 \to -2$; $6 \to 3$; $7 \to -3$ и т.д. Ясно, что введенная нами формула ставит в соответствие каждому натуральному числу n целое число z_n, причем каждое из целых чисел получается по этой формуле – ровно один раз. При этом обратное тоже будет верно. Нами построено взаимно однозначное соответствие между множествами, значит, они эквивалентны.

Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда в них одинаковое количество элементов. Поэтому естественно считать, что если одно бесконечное множество эквивалентно другому, то в нем «столько же» элементов. Однако не следует думать, что все бесконечные множества эквивалентны. Отметим, что множество $\boldsymbol{R}$ не является равномощным множеству Q. Можно сказать, что действительных чисел в каком-то смысле «больше», чем рациональных. Примем пока это утверждение без доказательства. Мы сможем разобраться, почему это так, чуть позже, в пункте «Счетные и несчетные множества».

K **1** Дано множество $M = \{\frac{1}{4}; 6\frac{3}{8}; 7\frac{23}{25}; 8\frac{3}{6}\}$. Запишите множество N, состоящее из элементов множества M, представленных в виде десятичных дробей.

2 Даны множества функций G и F. G – множество функций, заданных следующими графиками:



F – множество функций, заданных следующими формулами:

$F = \{y = 2(x - 1)^2;\ y = x;\ y = -x + 1;\ y = \frac{1}{x}\}$.

Сопоставьте функции, заданные графиками, и функции, заданные формулами. Что интересного вы наблюдаете?

3 Даны два множества $A = \{2{,}5;\ 3{,}01;\ 4{,}1;\ 5{,}0125\}$ и $B = \{3\frac{1}{100};\ 5\frac{1}{80};\ 2\frac{1}{2};\ 4\frac{1}{10}\}$. Сопоставьте элементы множества A и множества B. Что вы замечаете?

4 1) Предположите, как можно назвать множества G и F, множества A и B из предыдущих заданий.

2) Опираясь на то, что множество A равно множеству B, а множество G равно множеству F, сформулируйте свой вариант определения равных множеств. Сравните его с определением равных множеств на стр. 5.

5 1) а) Покажите, что дробь $\frac{2}{5}$ помимо своего естественного представления в виде конечной десятичной дроби $\frac{2}{5} = 0{,}4$, имеет еще одно представление в виде периодической дроби с девяткой в периоде: $\frac{2}{5} = 0{,}3999... = 0{,}3(9)$.

б) Запишите обыкновенные дроби $\frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{25}$ в виде десятичной дроби двумя способами.

в) Сделайте вывод о вариантах представления конечной десятичной дроби в виде периодической дроби.

2) Даны множества $A = \{3,(7);\ 2{,}1(34);\ 0{,}2(348);\ 0{,}7(9)\}$ и $B = \{\frac{34}{9};\ \frac{789}{1665};\ \frac{2113}{990};\ \frac{4}{5}\}$. Являются ли эти множества равными?

6 Какие из элементов множества $A = \{3;\ \frac{72}{3};\ -6;\ \frac{1}{8};\ -2{,}(02);\ \sqrt{144};\ \sqrt{15};\ \frac{(\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1)}{5};\ 0{,}24681012...\}$ (после запятой в последнем числе выписаны подряд все четные натуральные числа) принадлежат: а) множеству натуральных чисел; б) множеству целых чисел; в) множеству рациональных чисел?

7 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ и $B = \{-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5;\ -6\}$;

б) $A = \{\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ ...\}$ и $B = \{-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ ...\}$;

в) множество натуральных чисел и множество натуральных чисел, кратных пяти?

8 Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей хватит стульев, чтобы сесть за стол. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

9 1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров и все ее номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого ее постояльца в следующий по порядку номер, как показано на схеме:

$$\boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{3} \quad \dots \quad \boxed{n} \to \boxed{n + 1} \to \quad \dots$$

б) Можно ли поселить в нее еще одного постояльца?

в) Как поселить в эту гостиницу еще 1000000 постояльцев?

2) Докажите, что если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить еще один элемент, получится множество, которое снова эквивалентно множеству натуральных чисел.

3) Докажите, что если к множеству, которое эквивалентно множеству натуральных чисел, добавить конечное множество элементов, получится множество, которое также эквивалентно множеству натуральных чисел.

П **10** Решите уравнения:

а) $1,5x - 1,7 = 1,3$; в) $x + 7,6 = 0,2x + 6$;

б) $6,4x - 1,4 = 1,8$; г) $0,5x + 3,1 = -x + 2,5$.

11 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 3y = -11 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ |x - 3| - y = 3 \end{cases}$.

12 Решите уравнения:

а) $12,5x^2 = 2$; в) $x^2 + 6,5x - 3,5 = 0$;

б) $8x^2 - 0,5 = 0$; г) $0,5x^2 = 9 - 1,5x$.

13 Решите задачу:
Два автомобиля, работая вместе, могут перевезти груз за 15 ч. Один автомобиль работал на 6 ч меньше, чем второй, и перевез 40% груза, а второй – оставшийся груз. Сколько часов работал каждый автомобиль?

14 Решите уравнение: $(x^2 + 6x)^2 = -10x^2 - 60x - 16$.

Д **15** 1) Запишите целые числа, кратные 9 и принадлежащие промежутку [3; 53]. Обозначьте полученное множество A.

2) Запишите целые числа, кратные 3 и принадлежащие промежутку [4; 46]. Обозначьте полученное множество B.

3) Выпишите из множества B числа, кратные 9. Обозначьте полученное множество C.

4) Что вы можете сказать о множествах B и C? Запишите ответ на математическом языке. Что вы можете сказать о множествах A и C? Запишите ответ на математическом языке.

16 Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{-1; -2; -3; -4\}$;

б) $A = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \ldots\}$ и $B = \{\frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \frac{2}{5} \ldots\}$;

в) множество целых чисел и множество целых чисел, кратных трем?

17 Назовите два способа, которыми можно установить, что число накрытых приборов соответствует числу пришедших гостей. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

18 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 5y = -12 \\ x + 4y = -6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x - 2| - 2y = 2 \\ x - y = -3 \end{cases}$.

19 Решите уравнения:

а) $x^2 + 3{,}5x - 7{,}5 = 0$; б) $0{,}3x^2 = 12 + 1{,}8x$.

20 Решите задачу:
На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Одна из них может убрать всю улицу за один час, а другая за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 минут, после чего первая машина прекратила работу. Сколько нужно времени, чтобы одна вторая машина закончила работу?

С **21*** Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом часовая и минутная стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько времени продолжалась Колина прогулка?

22* Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: имеющих периметр 1997 или имеющих периметр 2000?

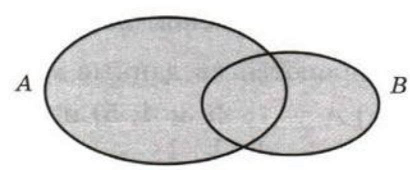
2. Операции над множествами

Подобно другим естественным наукам, математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром... Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели – это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в ее правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры.

Мартин Гарднер (1914–2010),
американский специалист в области занимательной математики

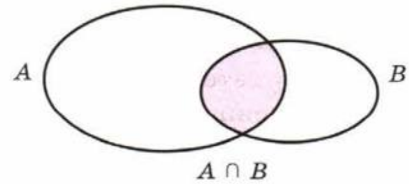
В предыдущем пункте мы уточнили основные понятия теории множеств, в этом пункте мы вспомним, какие операции над множествами нам известны и для чего они нужны. Кроме того, мы познакомимся и с новыми операциями над множествами и выясним область их применения.

Определение 1. **Объединением двух множеств A и B** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат либо A, либо B, либо и тому, и другому множеству одновременно (обозначаем $A \cup B$).



$A \cup B$

Определение 2. **Пересечением двух множеств A и B** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и A, и B (обозначаем $A \cap B$).



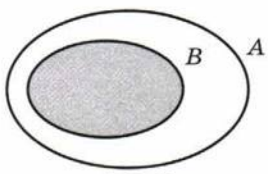
$A \cap B$

Объединение и пересечение множеств на диаграммах Эйлера–Венна мы иллюстрируем штриховкой.

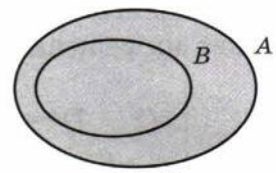
Приведем примеры объединения и пересечения множеств в таблице.

множество A	множество B	$A \cap B$	$B \cup A$
ученики $9^{А}$ класса	мальчики из $9^{А}$ и $9^{Б}$	мальчики из $9^{А}$	весь $9^{А}$ и мальчики $9^{Б}$
натуральные числа, кратные 3	четные натуральные числа	натуральные числа, кратные 6	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 0, 2, 3, 4
прямоугольники на плоскости	ромбы на плоскости	квадраты на плоскости	параллелограммы, у которых углы и/или стороны равны

Легко видеть, что если $B \subset A$, то $A \cap B = B$; $A \cup B = A$:

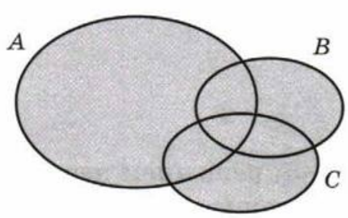


$A \cap B$

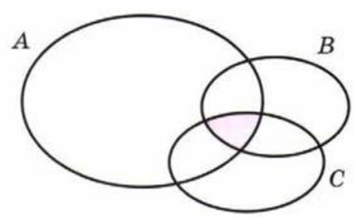


$A \cup B$

Можно найти объединение и пересечение более двух множеств:



$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$

Теперь, когда мы уточнили свои представления о пересечении и объединении множеств, вспомним, в каких ситуациях мы использовали эти операции.

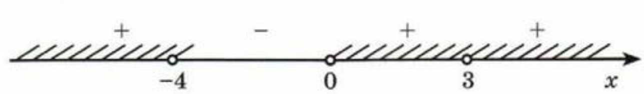
Мы применяли операцию объединения множеств, например, при решении неравенств методом интервалов.

Пример 1.

Решить неравенство $x(x - 3)^2(x + 4) > 0$.

Решение.

Отметив на числовой прямой точки, при которых произведение $x(x - 3)^2(x + 4)$ равно нулю, и расставив знаки этого произведения на полученных интервалах, получим:



Множество решений неравенства состоит из тех и только тех чисел, которые принадлежат одному из промежутков $(-\infty; -4)$, $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$, то есть их объединению. Для записи ответа используем знак $\cup$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

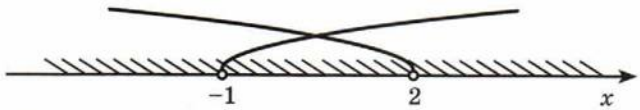
Также операцию объединения множеств мы применяли при решении совокупности неравенств.

Пример 2.

Решить $\left[\begin{aligned}&3x - 6 < 0\\&2x + 2 > 0\end{aligned}\right.$.

Решение.

Решением первого неравенства является луч $(-\infty;\ 2)$, второго – луч $(-1;\ +\infty)$, а их объединением является множество $(-\infty;\ +\infty)$.



$(-\infty;\ 2) \cup (-1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

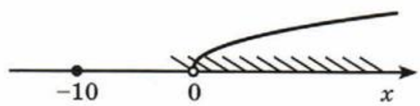
При решении совокупности неравенств мы находили объединение решений каждого из них. Ясно, что решением совокупности, например, уравнения и неравенства, также будет объединение их решений.

Пример 3.

Решить совокупность $\left[\begin{aligned}&3(x - 7) = 4x - 11\\&x > 0\end{aligned}\right.$.

Решение.

$$\left[\begin{aligned}&3(x - 7) = 4x - 11\\&x > 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&3x - 21 = 4x - 11\\&x > 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x = -10\\&x > 0\end{aligned}\right.$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0;\ +\infty)$, а их объединение запишем следующим образом: $\{-10\} \cup (0;\ +\infty)$.

Ответ: $\{-10\} \cup (0;\ +\infty)$.

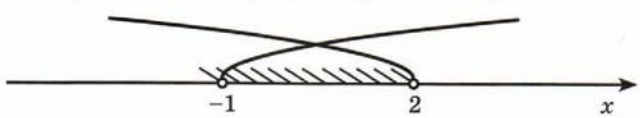
Операцию *пересечения множеств* мы применяли при решении систем.

Пример 4.

Решить систему неравенств $\begin{cases}3x - 6 < 0\\2x + 2 > 0\end{cases}$.

Решение.

Решением первого неравенства системы является открытый луч $(-\infty;\ 2)$, второго – открытый луч $(-1;\ +\infty)$, а их пересечением является множество $(-1;\ 2)$.



$(-\infty;\ 2) \cap (-1;\ +\infty) = (-1;\ 2)$

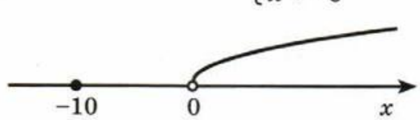
Ответ: $(-1;\ 2)$.

Пример 5.

Найти множество x, удовлетворяющих системе $\begin{cases}3(x - 7) = 4x - 11\\x > 0\end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases}3(x - 7) = 4x - 11\\x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x - 21 = 4x - 11\\x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -10\\x > 0\end{cases}$$



Решением уравнения является множество $\{-10\}$, решением неравенства – открытый луч $(0; +\infty)$, а их пересечением является пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

Теперь введем несколько новых операций для множеств.

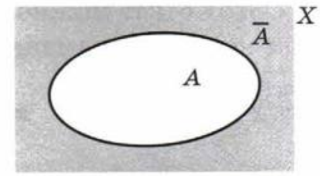


Рис. 1

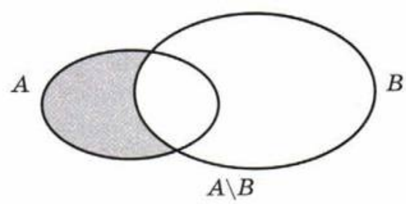
Определение 3. Пусть имеется некоторое множество X. **Дополнением множества A** называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат X, но не принадлежат A (обозначается $\overline{A}$).

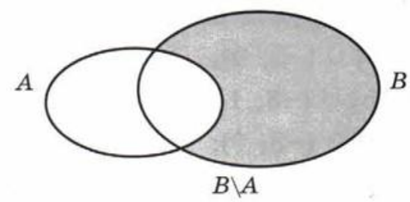
На диаграмме Эйлера–Венна $\overline{A}$ – это множество точек, не попавших в множество A (рис. 1).

Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$. Аналогичное равенство мы уже составляли для отрицания высказываний.

В дальнейшем множество X определяется из смысла задачи. Например, если в задаче рассматриваются множества на числовой прямой, то X – это вся числовая прямая.

Определение 4. **Разностью множеств A и B** называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B (обозначается $A \backslash B$).

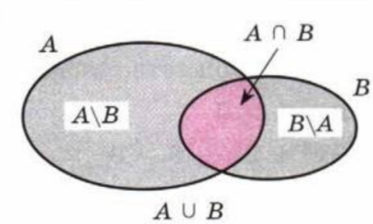




Как мы видим $A \backslash B$ и $B \backslash A$ – это разные, причем непересекающиеся множества.

Приведем примеры разностей различных множеств.

множество A	**множество B**	**$A \backslash B$**	**$B \backslash A$**
ученики $9^А$ класса	мальчики из $9^А$ и $9^Б$	девочки из $9^А$	мальчики из $9^Б$
натуральные числа, кратные 3	четные натуральные числа	натуральные числа, дающие при делении на 6 остаток 3	натуральные числа, дающие при делении на 6 остатки 2 или 4



Отметим, что объединение множеств $A \cup B$ содержит три непересекающихся множества: $A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$.

Из этого же рисунка очевидна справедливость еще одного свойства разности множеств A и B:

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A).$$

Эта новая для нас операция разности тоже имеет свое применение. Например, ее можно использовать при нахождении области допустимых значений алгебраической дроби, а, значит, и при решении дробно-рациональных уравнений.

Как мы помним, область определения алгебраической дроби – это множество, из которого исключают все значения переменных, обращающих ее знаменатель в ноль. Так в случае дроби с одной переменной мы находим разность множества $\boldsymbol{R}$ и множества чисел, обращающих знаменатель алгебраической дроби в ноль.

Пример 6.

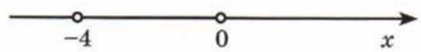
Найти область определения алгебраической дроби $\frac{x}{x^2 + 4x}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

Этот ответ можно получить, рассуждая следующим образом. Найдем значения x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль:

$$x^2 + 4x = 0 \ \Leftrightarrow \ x(x + 4) = 0 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ x \in \{0; -4\}.$$

Теперь найдем разность множества $\boldsymbol{R}$ и полученного множества $\{0; -4\}$.



$$\boldsymbol{R} \setminus \{0; -4\} = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty).$$

При записи ответа можно использовать как привычный нам знак объединения, так и новый знак разности.

23 Покажите на числовой прямой множества:

а) $(-3; 0)$; б) $[-3; 0]$; в) $\{-3; 0\}$.

Найдите $(-3; 0) \cup [-3; 0]$; $(-3; 0) \cap [-3; 0]$; $(-3; 0) \cup \{-3; 0\}$; $(-3; 0) \cap \{-3; 0\}$.

24 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; -5] \cup (-3; 0)$;
б) $[-10; -5] \cup (-3; 1] \cup \{5\}$;
в) $(-\infty; -5] \cap (-3; 0)$;
г) $[0; 3] \cap (1; 5)$;
д) $(0; 3) \cap (1; +\infty)$;
е) $(0; 3) \cup (1; +\infty)$.

25 Укажите на числовой прямой множество значений x, таких что:

а) $10 - 1{,}5(x - 5) < 9{,}5 - 3{,}5\,x$;
б) $(1{,}5x + 0{,}3)(x - 6) < 0$;
в) $\frac{(x + 3)(5 - x)}{2x - 5} > 0$;
г) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geqslant 1$.

26 Найдите множество корней уравнения, переходя к совокупности линейных уравнений:

а) $(x - 2)(2x + 7) = 0$; б) $(2x - 2)(x + 7)(3x - 1{,}2) = 0$.

27 Укажите на числовой прямой множество значений x, для которых выполняется неравенство:

а) $|x^2 - 5x| < 6$; б) $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$.

28 Найдите множество значений x:

а) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ -x^2 + 2x + 8 > 0 \end{cases}$;

б) $\left[\begin{array}{l} \frac{3 - 2x}{5} < \frac{1 - x}{2} \\ 2 - 3x > x \end{array}\right.$;

в) $\begin{cases} x^2 - 9x + 20 \leqslant x - 1 \\ x - 1 \leqslant x^2 - 13 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6 \\ |x + 1| \leqslant 1 \end{cases}$.

29 Множество A – все люди, живущие на Земле, множество B – люди, которые носят очки.

а) Какая из диаграмм соответствует данному условию?

б) Опишите множество, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

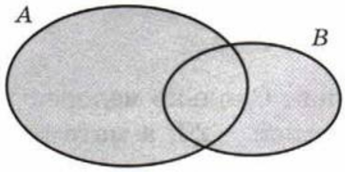


Рис. 1

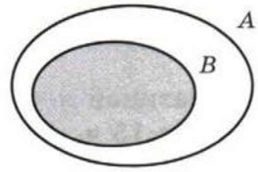


Рис. 2

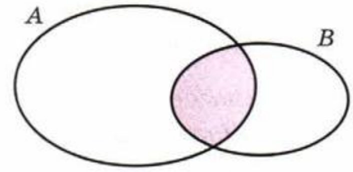


Рис. 3

в) Опишите множество, элементы которого не принадлежат множеству A.

г) Предположите, как называется множество, состоящее из тех элементов, которые не принадлежат множеству A. Сравните свои предположения с определением 3 на стр. 13.

30 Даны множества $A = \{5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30\}$, $B = \{10;\ 20;\ 30\}$, $C = \{5;\ 15;\ 25\}$. Выполните для этих множеств следующие задания:

а) Сопоставьте элементы данных множеств. Что вы замечаете?

б) Предположите, какая операция была выполнена с множествами A и B, если в ее результате получили множество C.

в) Опираясь на то, что множество C является *разностью* множеств A и B, сформулируйте свой вариант определения разности множеств. Сравните его с определением разности множеств на стр. 13.

31 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty;\ 1]\backslash(-3;\ 0)$; б) $[-1;\ 5]\backslash\{2\}$.

32 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $\overline{A}$, если $A = [0;\ 3]$; б) $\overline{A}$, если $A = \{0;\ 5;\ 7\}$.

33 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x}{3x-9}$; б) $\dfrac{n}{n^2-4}$; в) $\dfrac{2}{x^2+13x+30}$; г) $\dfrac{6a}{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}$.

Запишите ответ двумя способами.

34 Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами.

Коммутативное свойство	Ассоциативное свойство	Дистрибутивное свойство
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Докажите эти свойства, используя диаграммы Эйлера–Венна.

35 Операции объединения, пересечения и дополнения множеств обладают следующими свойствами, которые называют формулами де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Докажите эти свойства. Сравните их с изученными в 8 классе формулами де Моргана для высказываний

36 Докажите следующие свойства операций над множествами:

I. $A\backslash B = A \cap \overline{B}$

II. $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$

37 Докажите, что $(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$.

38 В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой увлекаются 15 человек, биологией – 20, а математикой и биологией – 10?

39 В первом пенале лежат лиловая ручка, зеленый карандаш и красный ластик; во втором – синяя ручка, зеленый карандаш и желтый ластик; в третьем – лиловая ручка, оранжевый карандаш и желтый ластик. Содержимое этих пеналов характеризуется такой закономерностью: в каждых двух из них ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвертом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась?

40 Среди математиков каждый седьмой – философ, а среди философов каждый девятый – математик. Кого больше: философов или математиков?

41 В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

П **42** Найдите значение выражения:

а) $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; б) $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$; в) $18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

43 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \dfrac{a - b - c}{abc}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a^2 + 3a + 2} + \dfrac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \dfrac{1}{a^2 + 5a + 6}\right)^2 \cdot \dfrac{(a-3)^2 + 12a}{2}$.

44 Один из корней уравнения $4x^2 - x + 3m = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

45 Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$, найдите сумму кубов его корней.

46 Решите задачи:

а) Из города A в город B, расстояние между которыми 30 км, выехал грузовик, а через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. Найдите скорость легкового автомобиля, если известно, что он приехал в город B на 5 мин раньше грузовика.

б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 38 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились в 20 км от пункта B, причем турист, шедший из пункта A, сделал в пути часовой привал. Найдите скорость туриста, вышедшего из B, если известно, что он шел со скоростью на 1 км/ч меньше, чем другой турист.

Д **47** Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(-\infty; 0]\backslash(-7; -6)$;

б) $[-100; -75]\backslash\{-75\}$;

в) $\overline{A}$, если $A = [1; 5)$;

г) $\overline{A}$, если $A = \{0\}$.

48 Найдите множество значений x:

а) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ -2x + 7 \geqslant 0 \end{cases}$; б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2x - 3{,}5}{5} < \dfrac{1 - 4x}{2} \\ 12 - 5x > x \end{array}\right.$.

49 Найдите множество значений x, удовлетворяющих системе:

а) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 \leqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) > 2x - 1 \\ |x - 1| + |x - 2| < 3 - x \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2 + x - x^2 \leqslant -1 - x \\ x^2 + 1 \geqslant 8x - 6 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{2} - \dfrac{2 - x}{7} > 1 \\ -4x - 1 < 0 \end{cases}$.

50 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x}{3 - 9x}$; б) $\dfrac{n}{11 - n^2}$; в) $\dfrac{2}{x^2 + 13x + 12}$; г) $\dfrac{a^2}{a^4 - 16}$.

Запишите ответ двумя способами.

51 Докажите, что $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

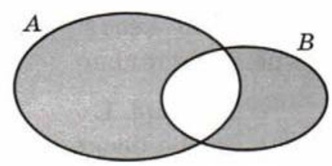
52 Решите задачу:

В 9 часов самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B, 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась обратно и прибыла в пункт A в 19 ч 20 мин того же дня. Течение реки 3 км/ч. Определить, в каком часу баржа прибыла в пункт B. Расстояние между пунктами A и B – 60 км.

53 Упростите выражение: $\left(\dfrac{m}{m^2 - 49} - \dfrac{m + 7}{m^2 - 5m - 14}\right) \cdot \dfrac{m^2 + 9m + 14}{-12m - 49}$.

C **54*** Прочитайте определение еще одной операции над множествами.

Определение. Объединение множеств $A\backslash B$ и $B\backslash A$ называется **симметрической разностью** множеств A и B (обозначается $A \triangle B$).



$A \triangle B$ закрашено

Пользуясь этим определением:

а) Приведите примеры симметрической разности двух множеств.

б) Докажите, что $(A \triangle C) \cap (B \triangle C) \subset (A \cap B) \triangle C$.

Примечание: обратите внимание, что здесь не равенство, а вложение. Равенства

$$(A \triangle C) \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle C$$

может и не быть. Например, если A – множество четных натуральных чисел; B – множество натуральных чисел, делящихся на 3; C – множество натуральных чисел, делящихся на 5).

55* Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех – Аня, меньше всех – Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него дается 1 очко, у одного игрока – 2 очка, слова, общие у всех трех игроков, вычеркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех – Аня?

3*. Счетные и несчетные множества

Моя теория как скала; всякая стрела, направленная в эту скалу, тотчас же отскакивает от нее и устремляется к выпустившему ее. Уверен я в этом потому, что изучил ее со всех сторон за многие годы, ...я исследовал ее корни, так сказать, до первой подлинной причины всего сотворенного.

Георг Кантор (1845–1918),
немецкий математик, основатель теории множеств

Говоря об известных нам числовых множествах в пункте 1.1.1, мы указали на то, что рациональных чисел «не очень много» – в некотором смысле столько же, сколько и натуральных чисел, а вот действительных чисел «значительно больше».

Впервые идею о том, что бесконечные множества имеют неодинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом высказал немецкий математик Георг Кантор во второй половине XIX века. Идеи Кантора оказались столь неожиданными и противоречащими интуиции, что вызвали множество нападок его современников. Учитель Кантора, один из авторитетных математиков того времени, называл своего ученика «шарлатаном». Сейчас открытия Кантора не вызывают сомнений, а его самого считают основоположником теории множеств.

Попытаемся разобраться с вопросом сравнимости бесконечных множеств и мы. Сначала введем определение.

Определение. Множество A называется **счетным**, если можно установить взаимно однозначное соответствие между A и множеством натуральных чисел.

Иными словами, множество называется счетным, если оно бесконечно и все его элементы можно занумеровать натуральными числами: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Исходя из примеров, разобранных нами в пункте 1.1.1, счетными являются множество четных натуральных чисел, а также множество целых чисел. Оказывается, множество рациональных чисел также является счетным. Чтобы показать это, предварительно докажем три вспомогательных утверждения.

Теорема 1.

Любое бесконечное множество A содержит счетное подмножество.

Доказательство.

Выберем некоторый элемент $a_1 \in A$. Так как множество A бесконечное, то можно выбрать элемент a_2 среди оставшихся элементов A, элемент a_3 среди элементов, оставшихся после выбора a_1 и a_2, и т.д. Построенное множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ счетно и принадлежит A (возможно совпадает с A). ■

Теорема 2.

Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Доказательство.

Пусть A – счетное, B – бесконечное подмножество, $B \subset A$. Докажем, что B – счетное множество. Занумеруем элементы A: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Выберем первый из номеров (n_1) такой, что $a_{n_1} \in B$. Из оставшихся номеров $n > n_1$ выберем первый (n_2) такой, что $a_{n_2} \in B$. Ясно, что $n_2 > n_1$. Из оставшихся номеров $n > n_2$ выберем первый (n_3) такой, что $a_{n_3} \in B$; ясно, что $n_3 > n_2 > n_1$, и т.д. Так как A – счетное множество, то все элементы B будут сюда включены: $a_{n_1} = b_1$, $a_{n_2} = b_2$, $a_{n_3} = b_3$ и т.д. Каждый из элементов B имеется среди $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, и через конечное число шагов он будет обозначен: $a_{n_k} = b_k$. Таким образом, все элементы B занумерованы: $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$, то есть B – счетное множество. ■

Теорема 3.

Объединение конечного и счетного множеств, объединение двух счетных множеств – счетные.

Доказательство.

1. Пусть A – счетное, B – конечное множество. Тогда $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ (свойство разности из п.1.1.2). Так как $B \backslash A \subset B$, то $B \backslash A = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ – конечное множество (может быть, даже пустое). Если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, то занумеруем множество $A \cup B$: $\{b_1, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Итак, $A \cup B$ – счетное множество.

2. Пусть A и B счетны. Тогда $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$. Если множество $B \backslash A$ конечно, то осталось применить первую часть теоремы. Если $B \backslash A$ бесконечно, то $B \backslash A$ – счетно (по теореме 2). Тогда $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B \backslash A = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$. Множество $A \cup B$ можно занумеровать так: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$. Итак, $A \cup B$ – счетное множество. ■

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать **теорему о счетности множества рациональных чисел.**

Множество рациональных чисел Q – счетное.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что множество положительных рациональных чисел счетное (обозначим его Q_+).

Выпишем положительные дроби, как показано на рисунке 1. Ясно, что при этом в каждой строке бесконечно много дробей и количество строк также бесконечно.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \ldots \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \ldots \\[2ex]
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 1

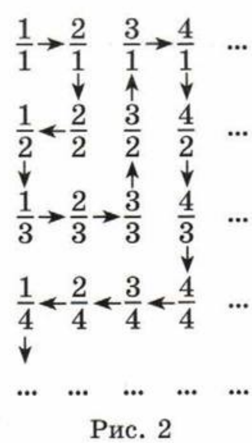


Рис. 2

Пронумеруем элементы этого множества, как показано на рисунке 2. Таким «хитрым» способом мы выстроили в последовательность все положительные рациональные числа, причем с повторениями ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ и т.д.) Полученное счетное множество будет содержать бесконечное подмножество Q_+ (в котором элементы уже не повторяются); и по теореме 2 множество Q_+ будет счетным.

Множество отрицательных рациональных чисел Q_- эквивалентно Q_+ (взаимно однозначное соответствие переводит положительное рациональное число r в отрицательное рациональное число $-r$), поэтому Q_- – также счетно.

2. Тогда так как множество рациональных чисел является объединением двух счетных и одного конечного множества ($Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$), то по теореме 3 оно является счетным. ■

Говоря о множестве действительных чисел можно утверждать, что оно, наоборот, несчетное.

Множество действительных чисел R не является счетным.

Для доказательства этого утверждения показывают, что несчетно множество чисел, принадлежащих полуинтервалу [0; 1). Отсюда следует и несчетность R, так как если бы R было счетно, то и его бесконечное подмножество [0;1) по теореме 2 также было бы счетным.

* * *

Докажем несчетность полуинтервала [0;1) методом от противного.

1. Пусть [0;1) – счетное множество. Тогда все числа полуинтервала [0;1), записанные как бесконечные десятичные дроби, можно занумеровать:

$$a_1 = 0,\ \alpha_1^{(1)}\ \alpha_2^{(1)}\ \alpha_3^{(1)} \ldots\ \alpha_k^{(1)} \ldots$$
$$a_2 = 0,\ \alpha_1^{(2)}\ \alpha_2^{(2)}\ \alpha_3^{(2)} \ldots\ \alpha_k^{(2)} \ldots$$
$$a_3 = 0,\ \alpha_1^{(3)}\ \alpha_2^{(3)}\ \alpha_3^{(3)} \ldots\ \alpha_k^{(3)} \ldots$$
$$\ldots$$
$$a_n = 0,\ \alpha_1^{(n)}\ \alpha_2^{(n)}\ \alpha_3^{(n)} \ldots\ \alpha_k^{(n)} \ldots$$
$$\ldots$$

В написанных десятичных дробях верхний индекс, взятый в скобки, обозначает номер числа в занумерованной последовательности; нижний индекс означает номер десятичного разряда в десятичной записи числа.

2. Рассмотрим число $a = 0,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots\ \beta_k \ldots$ такое, что $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}$, $\beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}$, $\beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}, \ldots$, $\beta_k \neq \alpha_k^{(k)}$ и т.д., причем все цифры $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ отличны от 0 и 9 (последнее условие нужно для того, чтобы число a единственным образом представлялось в виде бесконечной десятичной дроби). Ясно, что число a отлично от всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$.

3. Мы получили противоречие тому, что все числа полуинтервала [0; 1) занумерованы. Полученное противоречие показывает, что множество [0; 1) несчетно. ■

Отметим, что бесконечное множество, не являющее счетным, по теореме 1 содержит счетное подмножество, то есть бесконечное несчетное множество «более мощно», чем множество натуральных чисел. Значит, мы можем сделать вывод о том, что **действительных чисел в каком-то смысле больше, чем рациональных.**

Используя это утверждение, нетрудно вывести, что множество иррациональных чисел также не является счетным. Предположим, что множество иррациональных чисел счетное. Тогда так как множество рациональных чисел тоже счетно, то множество действительных чисел, как объединение этих двух множеств, также было бы счетным, а это не так.

Пример 1.

Доказать, что множество чисел любого конечного интервала (a; b) несчетно.

Доказательство.

Сначала уточним, что множество чисел интервала (0; 1) несчетно. Если бы оно было счетным, то при добавлении к нему конечного множества {0} получили бы счетное множество (по теореме 3). Однако выше мы показывали, что [0; 1) не является счетным множеством.

Теперь установим взаимно однозначное соответствие между интервалами (0; 1) и $(a; b)$ с помощью формулы $x = a + t(b - a)$, где $t \in (0; 1)$. Ясно, при $t = 0$, $x = a$, а при $t = 1$, $x = a + b - a = b$. Тогда если $0 < t < 1$, то $x > a$ и $x < b$, то есть $x \in (a; b)$.

Обратно, если $x \in (a; b)$, то $t = \dfrac{x - a}{b - a} \in (0; 1)$. Значит, $(a; b)$ – несчетное множество.

56 Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

а) множество учеников школы;

б) множество жителей нашей планеты;

в) множество чисел, использованных для нумерации страниц учебника;

г) множество натуральных чисел.

57 Назовите два способа, которыми можно установить, что каждому из гостей найдется пара для танцев. Какой из этих способов использует определение эквивалентности двух множеств?

58 1) Представьте, что существует гостиница с бесконечным числом номеров, и все ее номера заняты постояльцами. Ответьте на следующие вопросы:

а) Можно ли переселить каждого постояльца гостиницы в комнату, номер которой вдвое превосходит исходный номер, как это показано на схеме?

б) Можно ли поселить в эту гостиницу столько же постояльцев, сколько в ней уже живет? Объясните, как это сделать.

2) Докажите, что при объединении двух множеств, каждое из которых эквивалентно $\boldsymbol{N}$, вновь получается множество, эквивалентное $\boldsymbol{N}$.

59 Докажите, что счетным является:

а) множество целых чисел, дающих при делении на 4 остаток 1;

б) множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны.

60 Докажите, что несчетным является:

а) множество точек луча $(a; +\infty)$; б) множество $[a; b] \cup [c; d]$, где $a < b < c < d$.

61 Сократите дробь:

а) $\dfrac{3m^4 - 15m^3}{24m^3 - 120m^2}$; б) $\dfrac{a^2 + 3a + 9}{a^3 - 27}$; в) $\dfrac{b^2 - 36}{b^2 + 2b - 24}$.

62 Решите уравнения:

а) $\dfrac{2}{3 - x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{x(3 - x)}$;

б) $\dfrac{x + 2}{x + 1} + \dfrac{x + 6}{x + 3} + \dfrac{x + 10}{x + 5} = 6$;

в) $(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56$;

г) $8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0$;

д) $\dfrac{1}{x^2 + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 3} = \dfrac{1}{12}$;

е) $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$.

63 Решите задачу:
По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезд, скорости равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

64 При каком целом значении p уравнения $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имеют общий корень? Найдите этот корень.

65 Даны высказывания A и B.
A: натуральное число a делится на 3;
B: натуральное число a оканчивается на 3.
Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

Д **66** Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?
а) множество цветов на клумбе;
б) множество цветов, растущих на нашей планете;
в) множество чисел, использованных для написания цен в супермаркете;
г) множество целых чисел, оканчивающихся нулем.

67 Докажите, что множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами является счетным.

68 Сократите дробь:
а) $\dfrac{2a^3 + 6a^2}{18a^5 + 54a^4}$; б) $\dfrac{c^2 + 8c + 16}{c^3 + 64}$; в) $\dfrac{d^2 - 7d - 30}{d^2 - 100}$.

69 Решите уравнения:
а) $\dfrac{1}{2 - x} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{4}{x(2 - x)}$; б) $\dfrac{7}{x^2 + 3x - 9} + x^2 + 3x = 1$.

70 Решите задачу:
Железнодорожный состав длиной 1 км прошел бы мимо столба за 2 мин., а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости за 4 мин. Какова длина туннеля (в км)?

71 Даны высказывания A и B.
A: натуральное число m делится на 5;
B: натуральное число m делится на 9.
Сформулируйте высказывание $A \vee B$, придайте ему «более красивый» вид и постройте отрицание этого сложного предложения $\overline{A \vee B}$.

С **72*** (Новогодний парадокс) У Деда Мороза в мешке бесконечное число конфет, занумерованных натуральными числами. За минуту до Нового года он начинает дарить детям конфеты. Сначала он дарит детям конфету с номером 1. За полминуты до Нового года он дарит 2 конфеты с номерами 2 и 3, а конфету с номером 1 отбирает, за 15 секунд до Нового года он дарит 4 конфеты с номерами 4, 5, 6, 7, а 2 конфеты с номерами 2 и 3 отбирает, и т.д., за $\dfrac{1}{2^n}$ долю минуты до Нового года Дед Мороз дарит 2^n конфет с номерами от 2^n до $2^{n+1} - 1$ и отбирает 2^{n-1} конфет с номерами от 2^{n-1} до $2^n - 1$. Сколько конфет будет у Деда Мороза и у детей в момент встречи Нового года?

4. Применение понятий теории множеств.

На свете существует очень много наук, и все науки тесно связаны друг с другом. ...Но есть одна наука без которой невозможна никакая другая. Это – математика. Ее понятия, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки...

Сергей Львович Соболев (1908–1989),
российский математик

Как мы видели, понятия теории множеств применяются во многих изученных нами вопросах математики. Однако область применения этих понятий намного шире, чем та, которую мы выявили в предыдущих пунктах. Так, например, понятие взаимно однозначного соответствия между множествами неразрывно связано с уже знакомым нам понятием функции. В этом пункте мы рассмотрим связь понятий теории множеств с другими разделами математики.

Ключевым понятием математики является понятие функции. Вспомним, как звучит ее определение.

Определение. **Функцией** называется правило (закон), по которому каждому элементу некоторого *множества* X – области определения функции, *ставится* в соответствие единственный элемент другого *множества* Y – области значений функции.

При формулировке этого определения мы использовали понятия теории множеств («множество» и «соответствие между множествами»). Новый взгляд на это определение позволит нам расширить свои представления о функции.

На данный момент более привычными для нас являются *числовые функции*, то есть функции, у которых как область определения, так и область значений являются числовыми множествами. И, если это не было оговорено отдельно, под термином функция мы понимали именно числовую функцию.

Однако, как мы теперь понимаем, функция может устанавливать соответствие и между нечисловыми множествами.

Рассмотрим **примеры функций.**

1. Пусть A – множество высказываний, каждое из которых либо истинно, либо ложно, а B – множество из двух слов: «истинно», «ложно». Тогда функцией с областью определения A и множеством значений B является постановка в соответствие каждому высказыванию из множества A одного из слов множества B, указывающего на истинность или ложность этого высказывания.

Эта функция может быть задана таблицей.

Элемент множества A	Элемент множества B
Все слоны зеленого цвета	ложно
Поганки – съедобные грибы	ложно
Все слоны – не птицы	истинно
Мухоморы не выращивают в теплицах	истинно
В баскетбол играют на льду	ложно
В хоккей на льду играют клюшками	истинно

2. Функцией множества костюмов, продаваемых в магазине, является указанная на каждом элементе этого множества (костюме) его цена.

3. Функцией каждого дня года в определенном регионе является установившаяся в этот день минимальная температура воздуха. Эту функцию также можно задать таблицей.

Дата	Минимальная температура, °C
1 января	−13,6
2 января	− 14,2
3 января	− 16,1
...	...
30 декабря	− 9,3
31 декабря	− 8,7

Числовые функции мы чаще всего задаем аналитически (то есть в виде формулы, описывающей, как вычислить значения функции по значениям ее аргументов – чисел из области определения), иногда – графически или таблично, гораздо реже – словесным описанием. Приведем пример числовой функции заданной аналитически.

4. Линейная функция $y = 3x - 1$. Эта функция, например, числу 3 из области определения ставит в соответствие число 8 из множества значений, а числу −5 из области определения – число −16 из множества значений, так как $3 \cdot 3 - 1 = 8$ и $3 \cdot (-5) - 1 = -16$.

* * *

Рассмотрим взаимосвязь понятий «взаимно однозначное соответствие» и «функция». Ясно, что любое взаимно однозначное соответствие между множествами задает две функции (при этом как прямое, так обратное соответствие будут являться функциями).

Функция же может и не осуществлять взаимно однозначного соответствия между множествами. Так, в первом примере, рассмотренном нами выше, функция задает соответствие $A \to B$, при котором каждому элементу A соответствует единственный элемент B, а вот обратным соответствием $B \to A$ каждому элементу из В ставится сразу несколько высказываний. Функция из последнего примера осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами. Соответствие $X \to Y$ задается формулой $y = 3x - 1$, а соответствие $Y \to X$ задается обратной функцией $x = \frac{y+1}{3}$.

Как мы видели, в определении функции используются понятия теории множеств. Оказывается, язык теории множеств позволяет формулировать определения не только в теории функций, но и в других разделах математики, например, в теории вероятностей.

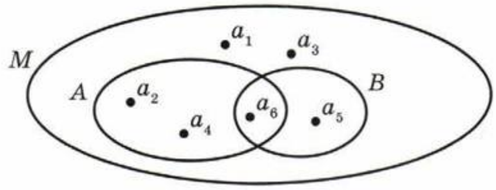
В 8 классе мы формулировали определение вероятности в классическом его варианте. Это определение звучало практически так же, как в работах французского математики Пьера Симона Лапласа еще в начале XIX века. Современный же его вариант формулируется на языке теории множеств.

Познакомимся с этим вариантом, но сначала введем несколько вспомогательных понятий.

Пусть некоторое испытание может иметь ровно n различных исходов, и все они попарно несовместны и равновероятны. Такие исходы называются **элементарными событиями**, а множество M, состоящее из всех элементарных событий, – **простран-**

ством элементарных событий. Тогда каждое непустое его подмножество $A \subset M$ – это **событие**, состоящее из нескольких элементарных событий, которые называются **благоприятствующими** событию A.

Так при одном бросании игральной кости пространство элементарных событий состоит из исходов: «выпало 1 очко», «выпало 2 очка», ..., «выпало 6 очков». Его подмножествами являются, например, события: A = «выпало четное число очков», состоящее из трех элементарных событий («выпало 2 очка», «выпало 4 очка», «выпало 6 очков»), а также событие B = «выпало больше 4 очков», состоящее из двух элементарных событий («выпало 5 очков», «выпало 6 очков»). Как мы видим, подмножества пространства элементарных событий могут пересекаться, или, иначе, одно элементарное событие (в данном примере – «выпало 6 очков») может благоприятствовать двум разным событиям.



Как мы видим, пространство элементарных событий определяется с помощью понятия «множество», а событие A определяется через понятие «подмножество».

Определение. Пусть n – количество элементов пространства элементарных событий M, а m – количество элементарных событий, благоприятствующих событию A, $A \subset M$. Тогда число $p(A) = \frac{m}{n}$ называют **вероятностью события** A.

Решим задачу на расчет вероятности события, используя новое определение.

Пример 1.

Бросают две игральные кости. Найдите вероятность выпадения дубля (то есть выпадения на обеих костях одинакового количества очков).

Решение.

Найдем количество элементов пространства элементарных событий M:

$$n = 6 \cdot 6 = 36.$$

Отметим штриховкой элементарные события, благоприятствующие событию A = «на обоих костях выпало одинаковое количество очков» в таблице. Количество m элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно шести.

Отсюда $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

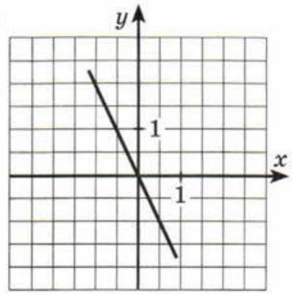
Итак, понятия теории множеств служат своеобразным фундаментом многих разделов математики, так как позволяют ввести их основные понятия.

очки на первой кости

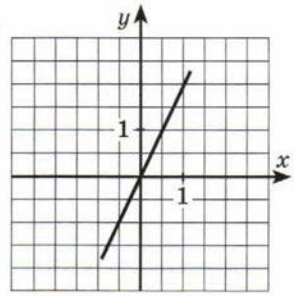
очки на второй кости	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

К **73** На рисунке изображены графики функций, задаваемых формулами вида $y = kx$. Укажите для каждого графика соответствующую ему формулу.

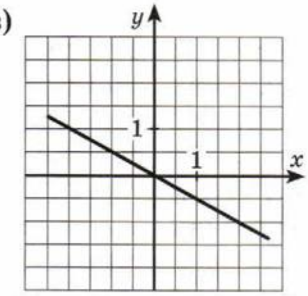
а)



б)

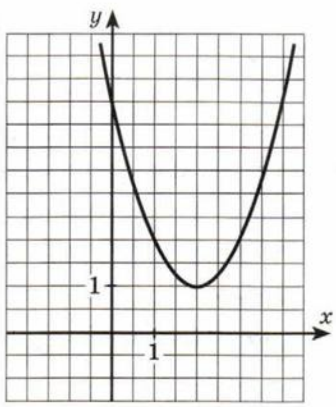


в)

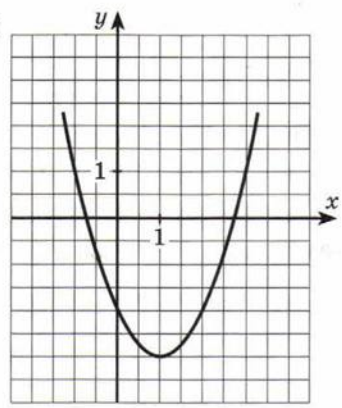


74 На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки коэффициентов a и c для каждого из графиков.

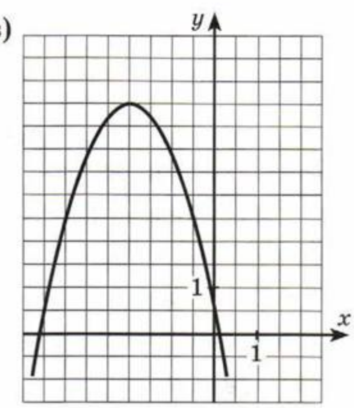
а)



б)



в)



75 Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \dfrac{x + 4}{x^2 + 4x}$; б) $y = \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$; в) $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x + 2)(x - 3)}$.

76 Линейная функция $y = \dfrac{1}{3}x + 1$ задана на области определения $[0; 3]$. Между какими множествами она задает соответствие?

Найдите значение x, при котором $y = 1$; $y = 1{,}4$; $y = 2$; $y = 4$. Как можно преобразовать формулу $y = \dfrac{1}{3}x + 1$, чтобы быстрее ответить на эти вопросы?

77 1) Линейная функция $y = 2x$ задана на области определения $[0; 10]$. Между какими множествами она задает соответствие?

2) Заполните таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	$6\frac{1}{3}$	8,5	10
y									

3) Рассмотрите соответствие, которое ставит всем полученным вами значениям функции $y = 2x$ в нижней строке значения из верхней строки. Задайте его формулой. Является ли оно функцией?

4) Осуществляет ли функция $y = 2x$ взаимно однозначное соответствие?

78 Любая ли функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами? Проверьте свое предположение, рассмотрев функцию $y = x^2$ и формулу, которая задает обратное ей соответствие.

79 Сформулируйте определение функции. Какие понятия используются в этом определении? Приведите примеры нечисловых функций.

80 1) Игральный кубик бросают дважды.

а) Сколько элементов в множестве исходов этого испытания?

б) Сколько элементов в множестве исходов, благоприятствующих событию A = «хотя бы один раз выпало число, меньшее 3»?

в) Найдите вероятность события A.

2) Какое событие соответствует подмножеству исходов, отмеченных в таблице? Найдите вероятность этого события.

очки на первой кости

очки на второй кости	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

3) Предположите, как сформулировать основные понятия теории вероятностей, используя понятия «множество», «подмножество». Сопоставьте свои предположения с определением вероятности на стр. 25.

81 Из 1400 новых карт памяти в среднем 56 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта памяти исправна?

82 Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 30 до 54 делится на 2?

83 Какова вероятность того, что при бросании трех игральных кубиков выпадут числа, сумма которых делится на 9?

84 В мешке лежит сто шаров. На них написаны различные натуральные числа от 1 до 100. Наугад из мешка вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что число на этом шаре:

а) не делится на 9; б) делится на 9 или на 2; в) не делится ни на 9, ни на 2.

П **85** При каких значениях x трехчлен $x^2 + 11x + 24$:

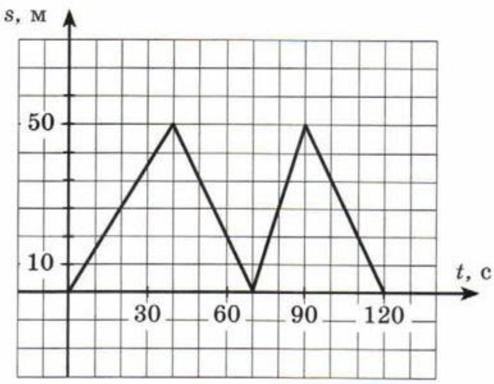
1) обращается в нуль;
2) принимает значение, равное 14;
3) принимает значение, равное -14;
4) принимает значение, равное значению двучлена $10 + 2x$?

86 При каком значении p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4?

87 Решите уравнение: $\left(x - \frac{8}{x}\right)^2 + 7 = 8x - \frac{64}{x}$.

88 Решите задачу:
Теплоход, собственная скорость которого равна 30 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 3 ч, а в исходный пункт теплоход возвращается через 18 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

89 Команда пловцов участвовала в эстафетном заплыве 4×50 м. На рисунке изображен график, показывающий зависимость расстояния s (в метрах) между пловцом и местом старта от времени движения t (в секундах). Какое из следующих утверждений неверно?



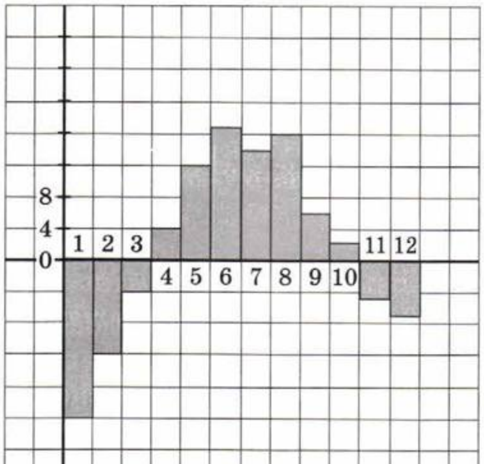
1) Пловец, плывший на первом этапе, проплыл свой этап за 40 с.
2) Команда проплыла дистанцию за 2 мин.
3) Средняя скорость пловца, плывшего на втором этапе, выше средней скорости пловца, плывшего на третьем этапе.
4) Вторую половину дистанции команда преодолела быстрее, чем первую.

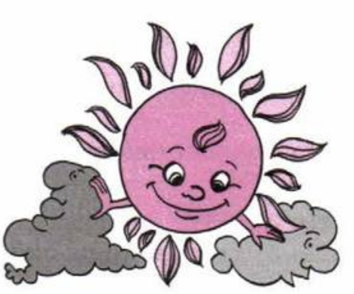
Д **90** Укажите область определения функции и постройте ее график.

а) $y = \dfrac{x+1}{x^2+x}$; б) $y = \dfrac{x^2+x-12}{x+4}$; в) $y = \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$.

91 В сборнике билетов по геометрии всего 35 билетов, в 14 из них встречается вопрос о прямоугольном треугольнике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос с прямоугольным треугольником.

92 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в одном из городов России за каждый месяц 1975 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Сколько месяцев среднемесячная температура была: а) ниже – 8°С? б) выше 10°С?



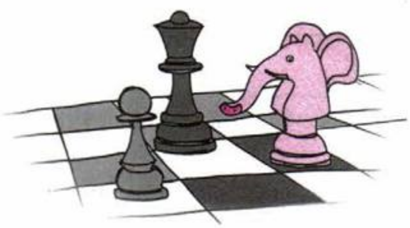


93 В мешке лежит двести шаров. На них написаны различные натуральные числа от 1 до 200. Наугад из мешка вытаскивают один шар. Найдите вероятность того, что число на этом шаре делится на 11, но не делится на 3.

94 Решите задачу:
Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Четыре часа спустя после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние проедет второй турист, прежде чем он догонит первого?

С **95*** В классе больше 20, но меньше 30 учеников, дни рождения у всех различны. Петя сказал: «Тех, кто старше меня в классе, в два раза больше тех, кто младше меня». Катя сказала: «Тех, кто старше меня в классе, в три раза меньше тех, кто младше меня». Сколько учеников в классе?

96 Назовем слонопотамом такую шахматную фигуру, которая может ходить и как слон, и как конь, причем если слонопотам сделал ход как конь, то следующим ходом он должен пойти как слон; если же он сделал ход как слон, то следующим ходом он должен пойти как конь. Может ли слонопотам обойти клетки доски 5×5, побывав на каждой клетке ровно по одному разу, и при этом закончить обход на клетке, соседней по стороне с клеткой начала обхода?



Друзья!

В этом году вы сможете продолжить самостоятельно определять уровень усвоения материала с помощью ***экспресс*-тестов**. Напоминаем, как подсчитать итоговую сумму баллов. За каждое верно выполненное задание (части А или части В) выставляйте себе по одному баллу. За каждое верно выполненное задание с развернутым ответом (часть С) – от 1 до 3 баллов в зависимости от правильности метода решения, формы записи и наличия вычислительных ошибок:

3 балла	решение верное, все его шаги обоснованы, получен верный ответ
2 балла	решение в целом верное, получен верный ответ, однако решение нерациональное или обосновано недостаточно
1 балл	решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка

Для проверки в конце теста представлен образец выполнения теста. Для оценки – *шкала успешности*. Важно помнить, что свой результат можно повысить, если разобраться, где и почему допущены ошибки, и потренироваться в выполнении аналогичных заданий.

Желаем вам высоких результатов!

Экспресс-тест № 1

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Решите уравнение $3x^2 + 8x - 3 = 0$.

А) $-\frac{1}{3}$; 3; Б) -3; $\frac{1}{3}$; В) -9; 1; Г) -1; 9.

№ 2

№ 2. Упростите выражение $\frac{x + y}{y} : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy^2}$.

А) $\frac{(x + y)^3}{xy^3}$; Б) $\frac{x}{x + y}$; В) $\frac{xy}{x + y}$; Г) $\frac{x + y}{xy}$.

№ 3

№ 3. Решите уравнение $\frac{3}{x} - \frac{3}{x + 4} = 1$.

А) -6; 2; Б) -3; 1; В) -2; 6; Г) -1; 3.

№ 4

№ 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 2 \\ 4 - x \geqslant 2x + 1 \end{cases}$.

А) $(0{,}3; 1)$; Б) $[1; +\infty)$; В) $[0{,}3; 1]$; Г) $(-\infty; 0{,}3]$.

№ 5

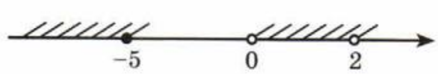
№ 5. Найдите область определения дроби $\frac{x - 4}{x^2 - 4x}$.

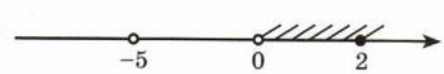
А) $(-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$; Б) $(-\infty; 0)$; В) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

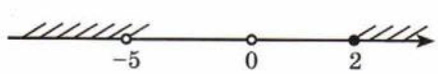
Часть В

№ 6

№ 6. Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой множество: $(-\infty; 2] \backslash (-5; 0)$.

А) 

В) 

Б) 

Г) 

№ 7

№ 7. Решите неравенство $-2x^2 + 3x + 5 < 0$.

А) $(-\infty; -1] \cup [2{,}5; +\infty)$; В) $(-1; 2{,}5)$;

Б) $(-\infty; -1) \cup (2{,}5; +\infty)$; Г) $[-1; 2{,}5]$.

№ 8

№ 8. Упростите выражение $\left(\frac{3}{x - 4} + \frac{4x^2 - 6}{x^2 - 3x - 4} + \frac{2x}{x + 1}\right) \cdot \frac{x}{2x - 3}$.

А) $-\frac{3}{x - 4}$; Б) $\frac{x}{x + 4}$; В) $\frac{x}{x - 4}$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. При каком значении a квадратное уравнение $ax^2 - 5x + \frac{1}{4}a = 0$ имеет два корня?

№ 10. Решите задачу:

Два пешехода выходят навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то он встретит второго пешехода через 4,5 ч после своего выхода. Если второй выйдет на 2 ч раньше первого, то он встретит первого пешехода через 5 ч после своего выхода. С какой скоростью идет каждый пешеход?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
Б	В	А	В	А	Г	Б	В

№ 9

Квадратное уравнение имеет два корня, если его дискриминант положителен.

$5^2 - 4 \cdot a \cdot \frac{1}{4} > 0 \;\Leftrightarrow\; 25 - a^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; (5 - a)(5 + a) > 0 \;\Leftrightarrow\; (a - 5)(5 + a) < 0$

Решим полученное неравенство:

Ответ: при $a \in (-5; 5)$.

№ 10

Пусть скорость первого пешехода x км/ч, а скорость второго y км/ч.

Составим математическую модель задачи:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 2{,}5 = 30 - 2x \\ (x + y) \cdot 3 = 30 - 2y \\ x > 0;\ y > 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} x - ? \\ y - ? \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x - 5y = -60 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x = -30 \\ 3x + 5y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ 3 \cdot 5 + 5y = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

$x = 5$, $y = 3$ – удовлетворяют неравенствам математической модели.

Ответ: скорости пешеходов 5 км/ч и 3 км/ч.

Шкала успешности:

13 – 14 баллов – *отлично*

9 – 12 баллов – *хорошо*

6 – 8 баллов – *удовлетворительно*

§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

1. Перестановки с повторениями

Кто повторяет старое и узнает новое, тот может быть предводителем.

Конфуций (551 – 479 г. до н.э.), китайский философ

В 8 классе мы познакомились с разделом математики, который изучает общие законы комбинирования различных объектов, – *комбинаторикой*. Мы вывели одну из формул комбинаторики, которая позволяет найти количество перестановок элементов некоторого множества без их непосредственного перебора. Вспомним, как можно использовать эту формулу на следующем примере.

Найдем количество всех различных вариантов орнамента, который получается путем перестановки трех элементов: черного и красного квадратов и звездочки.

□ * □

Мы могли нарисовать все возможные комбинации элементов, последовательно изменяя их порядок:

□□ *   □ * □   * □□   * □□   □□ *   □ * □

Быстрее этот результат мы получим, применяя способы, известные нам из 7 класса: правило произведения $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ либо формулу количества перестановок $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

А что если наш орнамент может быть использован только в черно-белом варианте? Тогда среди элементов орнамента будет два одинаковых квадрата:

□ * □

В этом случае различных вариантов орнамента будет только три – остальные дублируют ранее выписанные варианты. Вычеркнем их.

□□ *   □ * □   * □□   ~~* □□~~   ~~□□ *~~   ~~□ * □~~

Таким образом, при повторениях элементов формула $P_3 = 3!$ не работает, так как она включает в себя все перестановки, в том числе и дубли. Значит, рассчитывать число подобных перестановок нужно как-то иначе. В данном пункте мы найдем общий способ подсчета количества перестановок элементов множества, учитывающий возможность их *повторений*.

Для этого сравним решения двух аналогичных задач на «старый» и «новый» случаи, чтобы определить, как должен измениться уже известный нам способ для нахождения количества *перестановок с повторениями*.

Задача 1.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи мы должны узнать, сколькими способами можно переставить элементы множества из шести элементов. Используя формулу количества перестановок $P_n = n!$, известную нам из 7 класса, получим:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Ответ: 720 шестизначных чисел.

Задача 2.

Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры 1, 2, 3 встречаются в числе один раз, а цифра 4 – три раза?

Решение.

В отличие от предыдущей задачи, в наборе цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, с помощью которых мы записываем шестизначные числа, есть повторения – цифры 4, при перестановке которых число меняться не будет. Значит, количество полученных чисел будет меньше, чем в задаче 1. Чтобы его найти, попробуем свести решение нашей новой задачи к уже известному случаю.

Предположим, все цифры 4 разные – например, одна из них красная, другая серая, третья черная. Тогда числа, например,

123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, 123 444, –

разные, и количество всех «разноцветных» чисел, как и в предыдущем случае, будет равно 720.

Но наши числа – одного цвета, поэтому в действительности все перечисленные выше случаи являются одним и тем же числом 123 444. Следовательно, каждому шестизначному числу, составленному из цифр 1, 2, 3, 4, 4, 4, соответствует столько «разноцветных» чисел, сколько существует различных перестановок из трех элементов – а именно, $3! = 6$. Поэтому нужных нам чисел в 6 раз меньше, чем общее количество «разноцветных» чисел. Значит, таких чисел $720 : 6 = 120$.

Ответ: 120 чисел.

Для ответа на вопрос второй задачи мы узнали, что *количество перестановок 6-элементного множества с 3 повторяющимися элементами* равно $\frac{6!}{3!}$. Обобщая способ, использованный нами для подсчета вариантов в этой задаче, получаем следующее правило.

> Количество перестановок n элементов, среди которых k одинаковых, равно
> $$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k} = \frac{n!}{k!}.$$

Применим полученное правило к задаче с одноцветным орнаментом. В нем 3 элемента, два из которых повторяются. Поэтому число различных вариантов орнамента равно $\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$. Это же число мы получили и при непосредственном пересчете.

* * *

Теперь выведем формулу решения задач на перестановки с повторениями, принятую в комбинаторике. Для этого сформулируем задачу в общем виде.

Общая постановка задачи.

Сколькими способами можно упорядочить элементы множества из n элементов, в котором:

✓элементы a_1 встречаются k_1 раз (то есть в этом множестве k_1 элементов, равных a_1);

✓элементы a_2 встречаются k_2 раз;

...

✓элементы a_m встречаются k_m раз?

При этом $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, и $1 \leqslant k_1 \leqslant n$, $1 \leqslant k_2 \leqslant n$, ... , $1 \leqslant k_m \leqslant n$.

Таким образом, некоторые из чисел k_1, k_2, ..., k_m могут равняться 1, то есть элементы могут не повторяться.

Докажем, что *число перестановок с повторениями* равно $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$ (если какие-то элементы не повторяются, то соответствующие множители $k!$ в знаменателе равны 1).

Доказательство.

«Раскрасим» все одинаковые элементы в разные цвета так, чтобы все элементы множества можно было считать различными. Тогда перестановок множества «разноцветных» элементов будет всего $n!$

Так как k_1 «разноцветных» элементов, равных a_1, можно представить $k_1!$ способами, k_2 «разноцветных» элементов, равных a_2, $k_2!$ способами и т.д., то всего таких «разноцветных» перестановок будет $k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!$

Для получения ответа нужно общее количество «разноцветных» перестановок, то есть $n!$, разделить на $k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!$, что и требовалось доказать. ■

Подчеркнем еще раз, что полученная формула верна и для перестановок без повторений. В этом случае $k_1 = k_2 = ... = k_m = 1$ и формула сводится к известному с 7 класса виду: $P_n = n!$ Поэтому ее можно считать универсальной для поиска количества перестановок.

Итак, для подсчета количества перестановок n элементов некоторого конечного множества будем применять следующую общую формулу.

Общая формула количества перестановок из n элементов

$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}$, где k_1, k_2, ..., k_m – количества повторяющихся элементов.

Рассмотрим примеры применения этой формулы.

Пример 1.

Сколько шестизначных паролей можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, где цифры 1, 2 встречаются ровно один раз, а цифры 3, 4 – ровно два раза?

Решение.

По условию шестизначный пароль составляется из набора цифр 1, 2, 3, 3, 4, 4, где имеется два элемента 3 и 4, которые повторяются по 2 раза.

По общей формуле количества перестановок таких паролей будет:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{720}{4} = 180$$

(два множителя, равных 1!, соответствующих цифрам 1 и 2, мы не записываем, так как они не влияют на произведение в знаменателе).

Ответ: 180 паролей.

Пример 2.

Сколько различных слов можно написать, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

Решение.

В слове «МАТЕМАТИКА» всего 10 букв, буква А встречается 3 раза, буква М – 2 раза, буква Т – 2 раза, буквы Е, И, К – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$.

Ответ: 151 200 «слов».

К **97** Для оформления титульного листа своего доклада Саша использовала три рамки фиолетового, темно-синего и темно-зеленого цвета. Чтобы выбрать оптимальный вариант оформления, она меняла местами эти рамки всеми возможными способами и распечатывала все полученные варианты. Сравнив их, она сделала свой выбор. Сколько различных вариантов титульного листа она напечатала? Сколько различных вариантов титульного листа она получила бы, если б по ошибке распечатала их в черно-белом формате? Почему?

98 1) Чем отличаются следующие задачи?

а) Какие различные четырехзначные коды можно получить, переставляя карточки с цифрами 2, 4, 6, 8? Сколько их?

б) Какие различные четырехзначные коды можно получить, переставляя местами карточки с цифрами 2, 2, 2, 8 (цифра 2 написана на трех карточках)? Сколько их?

2) Решите первую задачу известным вам способом. Для нового случая сделайте карточки и проведите перебор. В какой задаче получено меньшее количество вариантов? Почему? В результате каких перестановок полученный числовой код не менялся?

3) Можно ли свести решение новой задачи к уже известному случаю? Что изменится в ходе ее решения? Можно ли применить способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех аналогичных задач? Сравните свои выводы о количестве перестановок с повторениями с правилом на стр. 33.

99 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «УРАВНЕНИЕ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

100 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПАРАБОЛА»?

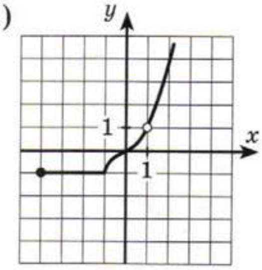
101 Сколько различных «слов» можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

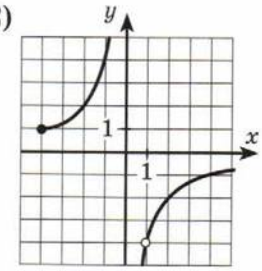
П **102** Докажите неравенство $\frac{p}{d} + \frac{d}{p} + \frac{q}{t} + \frac{t}{p} + \frac{a}{s} + \frac{s}{v} + \frac{v}{k} + \frac{k}{a} \geqslant 8$, где числа a, d, k, p, q, s, v, t – положительны.

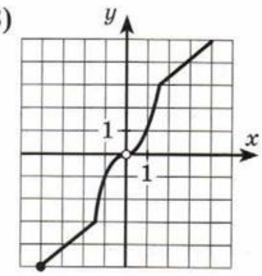
103 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{16}{x}$ при $x > 0$.

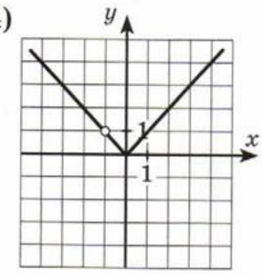
104 Найдите наименьшее значение выражения $x + \frac{(x+4)(x+5)}{x}$ при $x > 0$.

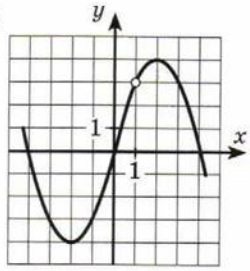
105 Этот современный японский прозаик известен тем, что увлекается марафонским бегом и триатлоном, очень любит джаз. ...Он считает, чтобы чего-то достичь, важно научиться ставить перед собой цель. А вы как считаете? Установив соответствие между графиками функций и областью определения функции, узнайте его имя.

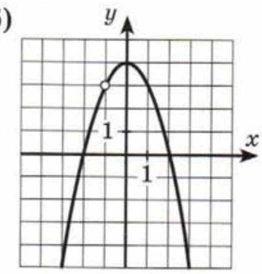
1)


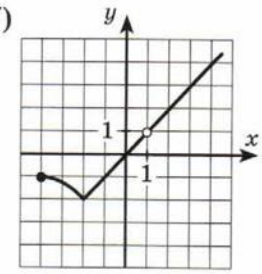
2)


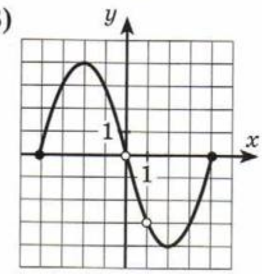
3)


4)


5)


6)


7)


8)


У $[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ **И** $[-4; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4]$ **К** $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

А $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ **М** $[-4; 1) \cup (1; +\infty)$ **Р** $[-4; 0) \cup (0; +\infty)$

106 Решите графически уравнение:

а) $-4x - 4 = x^2$; в) $-x^2 - 4x = 3x + 10$; д) $\frac{0,5}{x} = -5x$;

б) $x^2 - 1 = x + 1$; г) $x^3 = x$; е) $4x + 12 = -\frac{8}{x}$.

107 Постройте графики функции:

а) $y = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x^3, \text{ если } -1 < x < 1; \\ -x - 2, \text{ если } x \leqslant -1 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ если } x > 2; \\ |x|, \text{ если } x \leqslant 2 \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } |x| \geqslant 2; \\ x, \text{ если } |x| < 2 \end{cases}$

Какие из построенных вами графиков имеют разрывы?

108 Боря точно помнит, что в формуле серной кислоты подряд идут буквы H, S, O и что есть два нижних индекса 2 и 4. Но вот у каких букв стоят эти индексы, он не помнит. У него есть возможность использовать программу, которая по введенной формуле отражает название кислоты. Нарисуйте схему, с помощью которой он переберет все возможные варианты формулы. Сколько вариантов ему придется ввести в программу, чтобы определить нужную формулу в «худшем» случае? Можно ли ответить на этот вопрос без схемы?

109 Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$.

110 Постройте график функции $y = \frac{x-2}{(\sqrt{x^2 - 2x})^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

111 Бабушка, живущая в Белгороде, отправила 1 сентября четыре посылки своим внукам, живущим в разных городах России. В таблице дано контрольное время в сутках, установленное для пересылки посылок наземным транспортом (без учета дня приема) между некоторыми города России.

Пункт отправления	Пункт назначения				
	Владимир	Омск	Петрозаводск	Белгород	Сочи
Владимир		9	12	7	10
Омск	9		11	8	8
Петрозаводск	12	11		11	12
Белгород	8	8	13		9
Сочи	10	9	14	9	

Какая из данных посылок не была доставлена вовремя:

1) пункт назначения – Сочи, посылка доставлена 10 сентября;

2) пункт назначения – Омск, посылка доставлена 9 сентября;

3) пункт назначения – Петрозаводск, посылка доставлена 14 сентября;

4) пункт назначения – Владимир, посылка доставлена 11 сентября?

Д **112** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в словах «СЕМЬЯ», «КОМАНДА» («словом» считать даже бессмысленный набор букв, противоречащий правилам грамматики)?

113 Найдите наименьшее значение выражения $x + \dfrac{4}{x}$ при $x > 0$.

114 Решите графически уравнение:

а) $x^3 = -6x + 7$; б) $(x + 2)^2 = -1{,}25x + 4$; в) $\dfrac{3}{x} = x + 2$.

115 Постройте график функции и «прочитайте» его по известному плану:

$$y = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, \text{ если } x \geqslant 2; \\ \dfrac{1}{2}x, \text{ если } 0 \leqslant x < 2; \\ -(x + 2)^2 + 4, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Как называется эта функция?

С **116*** Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10 креслами так, чтобы они чередовались?

2. Размещения

Поиск истины значительно ценнее, чем обладание ею.

Готхольд Эфраим Лессинг (1729 – 1781),
немецкий поэт, критик, философ.

В предыдущем пункте мы составляли комбинации из элементов множества, переставляя местами все его элементы. Однако на практике может потребоваться выполнить эту задачу не со всеми элементами множества, а лишь с некоторым их количеством. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение.

Ясно, что комбинировать мы будем не все цифры, а только четыре из шести. Первую из четырех цифр числа можно выбрать 6 способами; если первая цифра фиксирована, то вторую можно выбрать 5 способами; если первые две цифры фиксированы, то третью можно выбрать 4 способами; и, наконец, если первые три цифры фиксированы, то четвертую можно выбрать 3 способами.

Следовательно, искомое количество будет равно: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ: 360 чисел.

Итак, для ответа на вопрос задачи 1 мы искали, сколькими способами можно разместить четыре из шести элементов множества в определенном порядке. Для этого нам потребовалось составить произведение чисел от 6 до 3.

Обобщив способ подсчета вариантов в задаче, получаем следующее правило.

Чтобы найти количество вариантов **выбора в определенном порядке k элементов из n ($k \leqslant n$)**, нужно найти произведение k множителей. Первый множитель равен n, а каждый последующий получается уменьшением предыдущего на единицу:

$$\underbrace{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множителей}}$$

Заметим, что при $k = n$ эта задача сводится к задаче определения количества перестановок множества из k элементов, а произведение приобретает известный нам вид: $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов, взятых *в определенном порядке* из n-элементного множества. Такие наборы элементов в комбинаторике называются **размещениями**.

Определение 1. Упорядоченный набор k элементов из n-элементного множества, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется **размещением из n по k.**

Количество размещений из n по k обозначается A_n^k (от первой буквы французского слова «arrangement» – расположение, размещение).

Сформулируем и решим задачу поиска A_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества упорядоченный набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Другими словами, сколько существует размещений из n по k.

Докажем, что количество размещений $A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство.

Первый элемент произведения можно выбрать n способами. При фиксированном первом элементе второй можно выбрать $(n-1)$ способом и т.д. Наконец, если первые $(k-1)$ элементов фиксированы, то последний k элемент можно выбрать $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ способами. Таким образом, общее число размещений из n элементов по k равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчета количества размещений по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять формулу.

Формула количества размещений из n элементов по k

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

В восьмом классе изучается 13 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на учебный день, если в этот день должно быть 7 уроков по различным предметам?

Решение.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке по 7 предметов из 13.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 7 элементов из 13:

$$A_{13}^7 = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 8\ 648\ 640.$$

Ответ: расписание на учебный день можно составить 8 648 640 способами.

Пример 2.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно назначить учащихся на 3 должности: староста, ответственный за участие в спортивных соревнованиях (физорг) и ответственный за организацию развлекательных мероприятий (культорг)?

Решение.

Мы составляем комбинации по 3 фамилии из 28. На первом месте будем писать фамилию старосты, на втором – физорга, а на третьем – культорга. Так как назначение Иванова старостой, а Петрова физоргом, и наоборот, Иванова физоргом, а Петрова старостой – это разные назначения, то порядок выбора фамилий существенен. Значит, нам нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке три фамилии из 28. По формуле количества размещений из 28 элементов по 3 искомое число способов равно $A_{28}^3 = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\ 656$.

Ответ: назначить учащихся на 3 должности можно 19 656 способами.

* * *

Произведение $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ можно записать с помощью понятия факториала. Для этого умножим и разделим произведение $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ на множители, дополняющие это произведение до $n!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\,(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Поскольку при $k = n$ в знаменателе формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ появляется выражение $0!$, которое пока не определено, нам необходимо придать выражению значение, при котором не возникнет противоречий с имеющимися у нас результатами.

Мы знаем, что при $k = n$ число размещений равно числу перестановок, значит:

$$A_n^n = P_n \;\Leftrightarrow\; \frac{n!}{(n-k)!} = n! \;\Leftrightarrow\; \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} \;\Leftrightarrow\; 0! = 1$$

Следовательно, чтобы установленная нами формула $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ работала при $k = n$, необходимо считать $0! = 1$. Это же значение $0!$ можно вывести и из других соотношений. Так, равенство $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, верное при всех натуральных $n = 1, 2, \ldots$, при $n = 0$ приобретает вид $1! = 1 \cdot 0!$, откуда $0! = 1$.

Поэтому здесь и далее мы будем считать, что $0!$ равен единице.

Определение 2. **$0! = 1$.**

Заметим, что при $n = 0$ (пустое множество) равенство $P_n = n!$ имеет вид $P_0 = 0! = 1$. Значит, чтобы формулы, содержащие факториалы, оставались верными при $n = 0$, нам надо договориться считать, что число перестановок пустого множества равно 1. При этом также $A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$.

Итак, если принять, что $0! = 1$, то для подсчета количества размещений по k элементов, взятых из n элементов некоторого конечного множества, можно применять также следующую формулу:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Эту формулу легче запомнить, но ее практическое использование требует умения переходить от знака факториала к произведению удобных множителей. Так, в рассмотренных выше примерах 1 и 2 можно выполнить следующие преобразования:

$$A_{13}^7 = \frac{13!}{6!} = \frac{\overset{1}{\cancel{6!}} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{\underset{1}{\cancel{6!}}} = 8\,648\,640.$$

$$A_{28}^3 = \frac{28!}{25!} = \frac{\overset{1}{\cancel{25!}} \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{\underset{1}{\cancel{25!}}} = 19\,656.$$

К **117** 1) Чем отличаются эти задачи?

а) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

б) Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в записи числа не повторяются?

2) Решите первую задачу двумя известными вам способами. Какой из них подойдет для решения второй задачи? Что изменится в ходе ее решения? Подойдет ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

3) Как найти количество вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n элементов ($k \leqslant n$), сравните свой ответ с правилом на стр. 39.

118 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 (цифры в записи числа не повторяются)? Сколько трехзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

119 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 (цифры в записи числа не повторяются)? Сколько трехзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

120 В какой из задач необходимо найти количество перестановок элементов множества $\{A, B, C, D\}$:

а) Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

б) Сколькими способами можно обозначить три точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

в) Сколькими способами можно обозначить две точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D?

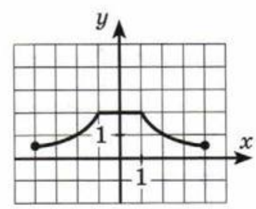
Как называются комбинации, которые следует пересчитать в двух последних задачах? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных комбинаторных задач на стр. 39.

121 На странице фотоальбома 3 свободных места для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 6 фотографий, 8 фотографий?

122 На странице фотоальбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные ячейки 2 фотографии, 4 фотографии?

123 Регистрационный знак российского автомобиля состоит из трех букв, которые обозначают серию знака, трех цифр регистрационного номера и цифрового кода региона. Для обозначения серии используются всего 12 букв кириллицы, которые имеют аналоги в латинском алфавите, — А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У и Х. Посчитайте, сколько регистрационных знаков может быть выдано в каждом субъекте России.

П **124** Сколько различных орнаментов может составить программа для дизайна, выстраивая в ряд 10 элементов, среди которых: а) пять одинаковых элементов; б) восемь одинаковых элементов?



125 Задайте формулой функцию, график которой изображен на данном рисунке. Докажите, что она является четной функцией.

126 Какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными?

а) $y = 0{,}5x^4 - x^2$;   в) $y = x^3 - 2x$;

б) $y = -\dfrac{3}{x} + x$;   г) $y = x^2 + |x| - 2$.

127 а) Для функции $f(x) = x^2$ найдите $f(\frac{1}{4})$; $f(-a)$; $f(a + 5)$.

б) Для функции $f(x) = -x^3$ найдите $f(-2)$; $f(-a)$; $0{,}2 \cdot f(a^2)$.

в) Для функции $f(x) = \frac{1}{x^3}$ найдите $f(0)$; $f(0{,}1a)$; $\frac{1}{f(a^3)}$.

г) Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(-4)$; $f(0)$; $f(100)$; $f((a-1)^2)$.

128 Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки, когда часы показывают ровно 11 часов?

129 Оценив значения выражений, выпишите их в порядке убывания и прочитайте высказывание великого русского писателя Л.Н. Толстого. Как вы понимаете эти слова?

$(0{,}1\sqrt{2})^2$	ВАЖНО	$\sqrt{3}(\sqrt{108}-\sqrt{75})$	ОШИБОЧНО
$-\sqrt{3{,}61}+\sqrt{2{,}89}$	КОЛИЧЕСТВО	$\sqrt{1\frac{155}{169}:\frac{9}{13}}$	ЧТО
$(\sqrt{5}-1)^2-6+3\sqrt{5}$	ДУМАТЬ	$\sqrt{(7+\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{6})^2}$	ЗНАНИЯ
$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$	ЕСТЬ	$\sqrt{0{,}1\cdot 0{,}001^3}$	НЕ
$5\sqrt{2}-4\sqrt{32}+2\sqrt{50}$	А	$\sqrt{45}-\sqrt{80}$	КАЧЕСТВО
$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	МНОГОЗНАНИЕ	$0{,}01\sqrt{3{,}6\cdot 2{,}5}$	ДОСТОИНСТВО

130 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ y = -5x - 10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = (x+2)^2 - 2 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}$; г) $\begin{cases} y = \sqrt{-x} \\ y = -\frac{1}{6}x + 1\frac{1}{3} \end{cases}$.

D **131** Сколькими способами можно обозначить четыре точки координатной прямой, используя буквы A, B, C, D, E, F?

132 Сколькими способами могут быть распределены первый, второй и третий призы между 15 участниками конкурса?

133 Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ y = -x + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -(x-1)^2 + 4 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$.

134 Расположите числа в порядке возрастания: $3\sqrt{2}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

C **135*** Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник – по два урока, ..., в каждую пятницу – по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни – учебными. В сентябре 30 дней.)

3. Сочетания

Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создает общие приемы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

Марк Иванович Башмаков (1937г.),
русский математик, ученый-педагог

В предыдущих пунктах мы составляли комбинации из некоторого количества элементов множества, размещая их в *определенном порядке*. Однако на практике выбор элементов из множества нередко осуществляется без учета порядка. В данном пункте мы познакомимся с формулой, которая используется в этих случаях.

Переформулируем пример 2 из предыдущего пункта таким образом, чтобы порядок выбора был не существенен.

Задача.

В классе 28 учеников. Сколькими способами можно выбрать трех учащихся для участия в школьном КВН?

Решение.

В данной задаче, в отличие от примера 2 предыдущего пункта, порядок фамилий в списке не важен, так как роли между учащимися не распределены. Поэтому выбор, например, Иванова, Петрова, Сидорова и выбор Сидорова, Петрова, Иванова – это один и тот же выбор. Таким образом, все списки, отличающиеся только порядком фамилий – Иванов–Петров–Сидоров; Иванов–Сидоров–Петров; Петров–Иванов–Сидоров и т.п. – для нашей задачи являются по сути одним и тем же списком.

Как следует из решения примера 2, если учитывать порядок фамилий, то всех возможных списков было бы $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$. Но среди них имеются лишние списки, дублирующие друг друга. Причем дублирующих списков столько, сколько существует перестановок из трех фамилий, то есть $3! = 6$. Значит, количество нужных нам вариантов в 6 раз меньше найденного и равно $\dfrac{19\,656}{6} = 3276$.

Ответ: трех учащихся из 28 учеников можно выбрать 3276 способами.

Для ответа на вопрос задачи мы узнали, сколькими способами можно выбрать 3 элемента из 28 элементов множества, не учитывая порядка выбора.

Выведем теперь общую формулу для решения задач на выбор k элементов из n-элементного множества, когда порядок элементов не существенен. Такие наборы элементов называются *сочетаниями*.

Определение 1. Набор k элементов, взятых из n-элементного множества без учета их порядка, где $1 \leqslant k \leqslant n$, называется **сочетанием из n по k.**

Количество сочетаний из n по k обозначается C_n^k (от первой буквы французского слова «combinaison» – сочетание).

Сформулируем и решим задачу поиска C_n^k в общем виде.

Общая постановка задачи.

Имеется множество из n различных элементов. Сколькими способами можно выбрать из этого множества набор из k различных элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$, если порядок выбора значения не имеет? Другими словами, сколько существует сочетаний из n по k?

Докажем, что количество сочетаний $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$.

Доказательство.

Количество упорядоченных наборов по k элементов из n различных элементов равно $A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Так как в сочетаниях порядок не имеет значения, то каждый набор из k элементов при перестановке элементов фактически дублируется P_k раз. Значит, наборов, не учитывающих порядок элементов, будет в P_k раз меньше:

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, что и требовалось доказать. ■

Итак, для подсчета количества сочетаний по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять следующую формулу.

Формула количества сочетаний по k элементов из n

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы.

Пример 1.

Для проведения экзамена создается комиссия из трех преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из семи преподавателей?

Решение.

Так как порядок назначения преподавателей в комиссию роли не играет, то искомое число равно $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$.

Ответ: можно организовать 35 различных комиссий.

Пример 2.

В шахматном турнире 15 участников, и турнир проводится в один круг (каждые два участника играют между собой один раз). Сколько партий будет сыграно?

Решение.

Искомое количество партий ровно числу способов, которыми можно выбрать двух человек из 15 (порядок роли не играет). Поэтому искомое число способов равно $C_{15}^2 = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$.

Ответ: будет сыграно 105 партий.

Заметим, что формулу количества сочетаний можно записать также с помощью знака факториала. Действительно,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Следовательно, для подсчета числа сочетаний по k элементов из n элементов некоторого конечного множества можно применять еще одну формулу:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Полученные нами комбинаторные формулы позволяют существенно упростить решение задач на перебор вариантов и определение их количества. Однако правильность решения во многом зависит от того, верно ли выбрана формула. Следующий алгоритм с вопросами-подсказками помогает разобраться, о каких комбинациях идет речь в задаче: о перестановках, размещениях или сочетаниях.

* * *

Если считать, что $C_n^0 = 1$, то равенство $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ сохраняется при всех $0 \leqslant k \leqslant n$ (запись $n(n-1) \dots (n-k+1)$ при $k = 0$ смысла не имеет, так как в ней нет ни одного множителя).

Ясно, что если заменить k на $n - k$, то выражение $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ не изменится. Поэтому

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ 0 \leqslant k \leqslant n$$

Так, $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^2 = C_n^{n-2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$; $C_n^3 = C_n^{n-3} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$...

Числа C_n^k принято называть биномиальными коэффициентами. Эти числа обладают рядом замечательных свойств, которые связывают комбинаторику с другими разделами математики.

Докажем несколько свойств биномиальных коэффициентов.

Свойство 1.

Доказать, что $C_n^{k+1} + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Доказательство.

Данное тождество можно доказать алгебраическим способом.

Запишем сумму дробей, равных C_n^{k+1} и C_n^k, упростим полученное выражение и применим правило сложения дробей с разными знаменателями.

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1) \cdot (n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = C_{n+1}^{k+1},$$ что и требовалось доказать. ■

Это же тождество можно доказать другим способом, используя комбинаторный смысл биноминальных коэффициентов.

Предположим, что в классе учится $n + 1$ человек, и нам нужно направить на соревнования команду из $k + 1$ учащихся. Сколькими способами это можно сделать?

Согласно формуле количества сочетаний это число равно C_{n+1}^{k+1}. Но это же число способов можно подсчитать и по-другому.

Выберем одного человека из класса, пусть это будет Вася Иванов. Возможны два варианта: Вася Иванов либо попал в команду, либо нет.

Если Вася будет в команде, то в ней останется k мест, на которые претендуют n школьников. Значит, оставшуюся часть команды можно выбрать C_n^k способами.

Количество команд, в которые Вася не попадает, равно C_n^{k+1}, так как в них на $k + 1$ мест претендуют n школьников (без Васи).

Таким образом, общее число команд равно $C_n^{k+1} + C_n^k$. Следовательно,

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, что и требовалось доказать. ■

Доказанное нами свойство использовалось в так называемом треугольнике Паскаля, с помощью которого мы определяли в 7 классе коэффициенты двучлена n-ой степени.

Для биномиальных коэффициентов выполняются и другие интересные свойства. Например, то, что наибольшее возможное значение C_{2n}^k при $0 \leqslant k \leqslant 2n$ равно C_{2n}^n (то есть наибольшим является средний из биномиальных коэффициентов). Или свойство суммы биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

К **136** Важен ли порядок указания элементов множества при выборе:

а) двух координат точки на плоскости;

б) шести человек из класса для уборки помещения;

в) трех новых серий сериала для просмотра;

г) пяти новых серий сериала для скачивания;

д) двух человек из отдела на должность начальника и его заместителя?

137 Сравните списки, чем они отличаются? Какого варианта не хватает? Дополните списки нужным вариантом.

1. Соколова. 2. Сорокина. 3. Синицына.	1. Соколова. 2. Синицына 3. Сорокина.	1. Сорокина 2. Соколова. 3. Синицына.	1. Сорокина. 2. Синицына 3. Соколова	1. Синицына 2. Соколова. 3. Сорокина.

Являются ли данные списки различными, если это варианты:

а) порядка выступлений участниц вокального конкурса?

б) перечня фамилий участниц, прошедших в финал конкурса?

138 1) Чем отличаются эти задачи?

а) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если учитель указывает, в каком порядке ребята должны выступать в конкурсе?

б) В классе учится 10 мальчиков. Для участия в конкурсе учителю следует отобрать троих из них. Сколько существует вариантов таких списков, если ребята будут выступать в конкурсе одновременно?

2) Решите первую задачу известным вам способом.

3) Можно ли использовать этот способ для решения второй задачи? Что изменится в ходе ее решения? Подойдет ли способ, использованный при решении этой задачи, для решения всех подобных задач?

4) Как найти количество вариантов выбора k элементов из n элементов ($k \leqslant n$), если порядок их выбора не имеет значения?

5) Как называются комбинации, которые следует пересчитать во второй задаче? Познакомьтесь с их названием и выводом общего способа решения подобных задач.

139 В 8а классе учатся 15 мальчиков.
а) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят для участия в футбольном турнире?
б) Сколькими способами можно выбрать из них 11 ребят – одного вратаря и 10 полевых игроков для участия в футбольном турнире?

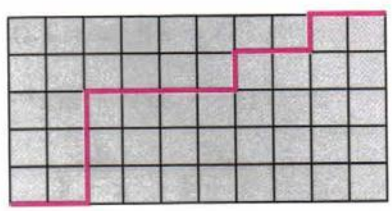
140 На плоскости отмечено n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

141 На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

142 Электронные часы показывают время от 00:00:00 до 23:59:59.
а) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?
б) Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?
в) Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?

143 Сколькими способами можно разбить 12 человек на две волейбольные команды по 6 человек в каждой?

144 Дан клетчатый прямоугольник 10×5. Сколько существует различных кратчайших на этой сетке путей, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний угол?



145 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует четырехугольников с вершинами в этих точках?

146 Каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

147 «Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет».
Сколькими способами они могут усесться на одной лавке?
Сколькими способами из них можно организовать трио?
Сколькими способами выбранное из них трио можно рассадить на одной лавке?

П **148** Сколькими способами могут быть заняты первое, второе и третье места на соревнованиях, в которых: а) 3 участника; б) 6 участников?

149 Сравните числа:
а) 7 и $\sqrt{42}$; б) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$; в) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; г) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

150 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})(\sqrt{13}+2\sqrt{3})$;

д) $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}-\sqrt{(\sqrt{10}-2)^2}$;

б) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$;

е) $(3-\sqrt{11})^2+6\sqrt{20-6\sqrt{11}}$;

в) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$;

г) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}}-\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$;

з) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)$.

151 Решив уравнения, выясните, какая буква ему соответствует. Выстроив буквы в той же последовательности, что и уравнения, вы получите имя одного из немногих композиторов с Туманного Альбиона, получившего мировое признание. На протяжении всей своей жизни этот британский композитор (XX в.) неустанно работал над собой и считал: «*Учиться – это все равно что плыть против течения, как только прекращаешь грести, течением тебя относит назад*».

1) $x^2-10x-24=0$;

2) $5x^2+8x+6=0$;

3) $x-\dfrac{6x}{x+5}=\dfrac{30}{x+5}$;

4) $\dfrac{3x+1}{x+2}-\dfrac{x-1}{x-2}=1$;

5) $2x^2-5x+3=0$;

6) $(3x-1)(4x+12)=(2x+3)(x-4)$;

7) $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=0$;

8) $\dfrac{x^2}{x-4}=\dfrac{4x}{x-4}$;

9) $\dfrac{6}{x-4}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{6}{x-4}\cdot\dfrac{x}{x+2}$;

10) $\dfrac{3x+4}{5}-\dfrac{x^2-4x-6}{10}=-1$;

11) $3x^4-10x^2+3=0$;

12) $0{,}04x^2=0$;

13) $x^2+3|x|-4=0$;

14) $5-5x^2=0$;

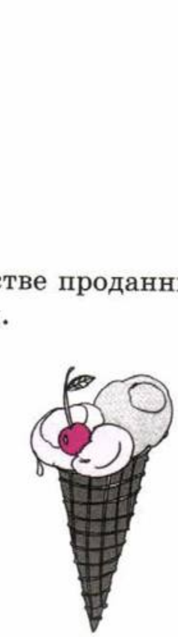
15) $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{3(2x-1)}{7(2x+1)}=\dfrac{8x}{4x^2-1}$;

16) $x^2-12x+36=0$.

$-4; -2; -1; 1$	**М**
$\varnothing$	**Е**
$-2; 12$	**Б**
$\sqrt{3}; -\sqrt{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**Р**
± 1	**Т**
$3\pm\sqrt{5}$	**Д**
0	**И**
6	**Н**
1; 1,5	**Ж**
−3,7; 0	**А**

152 В таблице указаны данные отчета одного из магазинов о количестве проданных порций мороженого в летние и осенние месяцы за последний год.

Июнь	704	Сентябрь	312
Июль	855	Октябрь	204
Август	601	Ноябрь	126



1) Вычислите среднее количество порций мороженого, проданного: а) за один летний месяц; б) за один осенний месяц. Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

2) Найдите медиану данных за летние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за лето показатели продаж? Найдите медиану данных за осенние месяцы. В каком месяце были зафиксированы средние за осень показатели продаж? Найдите медиану данных за все эти месяцы.

3) Вычислите размах указанных в таблице значений. Дайте возможное объяснение тому, что этот показатель достаточно значителен.
Будет ли так значителен размах продаж:
а) за летние месяцы;
б) за осенние месяцы?
Проверьте свое предположение, вычислив эти показатели.

Д **153** На школьной олимпиаде 7 человек из параллели восьмиклассников показали одинаково хорошие результаты. Сколькими способами учитель может выбрать двоих из них для участия в районной олимпиаде?

154 Учащимся дали список из 10 книг, рекомендованных для прочтения на летних каникулах. Олег решил, что более шести книг прочитать не сможет. Сколькими способами он может их выбрать из списка?

155 На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

156 В шахматном кружке занимаются 10 человек. Сколькими способами их тренер может: а) переставить местами их фамилии в списке; б) выбрать из них для предстоящего турнира команду из 4 человек; в) выбрать из них для предстоящего турнира команду из четырех человек, указывая, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвертой досках?

157 Упростите выражение:

а) $(\sqrt{11} - 2\sqrt{7})(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})$;
в) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^2$;
б) $\sqrt{(4-\sqrt{19})^2}$;
г) $(2 - \sqrt{7})^2 + 4\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

158 Решите уравнения:

а) $(x - 3)^2 - 2(x - 3) - 15 = 0$;
в) $x^2 + 6|x| - 72 = 0$;
б) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$;
г) $\frac{x}{x+3} - \frac{4}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$.

С **159*** Сколькими способами можно разделить класс из 24 человек на четыре команды по шесть человек для игры в волейбол?

160* Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

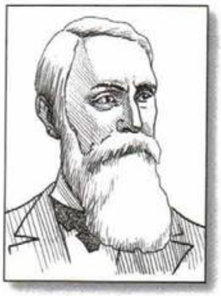
161* Ко дню Российского флага продавец украсил витрину 12 горизонтальными полосками ткани трех цветов. При этом он выполняет два условия:

1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;

2) каждая синяя полоса должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

4. Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность



Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новые предметы для исследования, или новые стороны в предметах давно известных

Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894),
русский математик и механик

Мы знаем, что многие науки связаны с математикой – они используют ее достижения в качестве вычислительного аппарата. Точно также и различные разделы математики проникают друг в друга: в одном ее разделе используются закономерности, выявленные в другом: например, для решения геометрических задач используются арифметические расчеты и алгебраические формулы, в свою очередь, геометрические модели помогают решать арифметические и алгебраические задачи и т.д.

Такая ситуация складывается и в теории вероятностей – мы видели, что для подсчета вероятности наступления событий, не являющихся равновозможными, нам требуются знания из статистики. В этом пункте мы выясним, знания из каких еще областей математики применяются при решении вероятностных задач.

Рассмотрим задачу.

Задача 1.

Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составляется шестизначное число (каждая цифра используется один раз). Чему равна вероятность того, что полученное число будет делиться на 25?

Решение.

Вероятность того, что полученное число будет делиться на 25, равна отношению количества чисел, составленных из цифр от 1 до 6 и кратных 25, к количеству всех чисел, которые можно составить из этих цифр.

По условию, каждая цифра используется в записи числа один раз, поэтому общее количество чисел, составленных из цифр от 1 до 6, равно количеству перестановок из шести элементов: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Чтобы натуральное число делилось на 25, его последние цифры должны быть либо 00, либо 25, либо 50, либо 75. В нашем случае это могут быть только цифры 25. Следовательно, две последние цифры зафиксированы, а из оставшихся четырех цифр 1, 3, 4 и 6 можно составить $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ вариантов чисел.

Значит, искомая вероятность равна $p = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \dfrac{1}{30}$.

Ответ: полученное число будет делиться на 25 с вероятностью $\dfrac{1}{30}$.

Итак, при расчете вероятности случайного события нам потребовались методы **комбинаторики.** Рассмотрим еще несколько примеров применения комбинаторики в теории вероятностей.

Пример 1.

Какова вероятность того, что две подруги Маша и Даша родились в один месяц?

Решение.

Каждая из девочек могла родиться в любом из 12 месяцев (здесь мы делаем допущение о равновероятности рождения человека в разных месяцах года). Поэтому событие: «Маша родилась в ...» может иметь 12 исходов. Точно также событие «Даша родилась в ...» имеет 12 исходов.

Чтобы найти общее число исходов события «Маша родилась в ..., а Даша родилась в ...», нам необходимо посчитать количество пар, каждый элемент которой может быть выбран 12 способами. На основании правила произведения, известного из комбинаторики, эту пару можно выбрать $12 \cdot 12 = 144$ способами.

Итак, общее число возможных исходов равно 144. Из них благоприятными исходами являются: «обе родились в январе», ..., «обе родились в декабре», то есть пары с одинаковыми элементами – всего 12 исходов.

Следовательно, по формуле вероятности получаем: $p(A) = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$.

Ответ: вероятность того, что подруги родились в один месяц, равна $\frac{1}{12}$.

Пример 2.

У маленького Пети есть три кубика с буквой А, по два кубика с буквами М и Т, по одному кубику с буквами Е, И, К. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «МАТЕМАТИКА»?

Решение.

Общее количество исходов равно количеству «слов» из 10 букв, где одна буква (буква А) повторяется 3 раза, а две буквы (М и Т) – по 2 раза. По общей формуле количества перестановок оно равно $P_n = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\ 200$.

Из них лишь один исход благоприятен, так как лишь одно расположение букв составит слово «МАТЕМАТИКА». Значит, искомая вероятность равна $p(A) = \frac{1}{151\ 200}$. Как мы видим, она очень мала.

Ответ: вероятность выкладывания Петей слова «МАТЕМАТИКА» равна $\frac{1}{151\ 200}$.

Пример 3.

В школьной физической лаборатории 15 мультиметров, два из которых – бракованные. Учитель наугад взял для урока 12 мультиметров. Какова вероятность того, что они все – исправные?

Решение.

Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 12 мультиметров из 15. Оно равно $C_{15}^{12} = \frac{15!}{12! \cdot (15-12)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ (порядок приборов в выборе учителя не является существенным).

Число благоприятных исходов равно числу способов выбора 12 мультиметров из 13 исправных. Это число есть $C_{13}^{12} = \frac{13!}{12! \cdot (13-12)!} = 13$.

Значит, искомая вероятность равна $p(A) = \frac{13}{455} = \frac{1}{35}$.

Ответ: вероятность того, что все взятые мультиметры исправные, равна $\frac{1}{35}$.

При определении вероятности случайного события используется не только комбинаторика, но и другие разделы математики, например, геометрия.

Рассмотрим еще одну задачу.

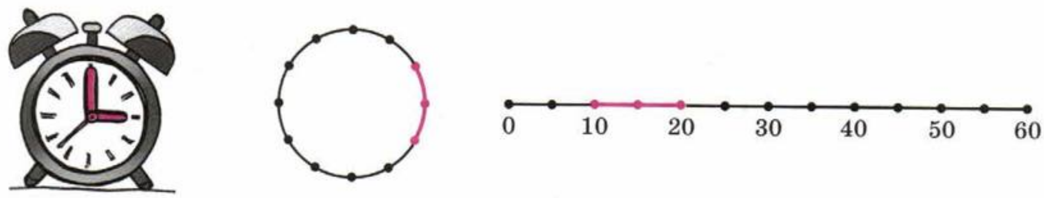
Задача 2.

Коля проснулся ночью и взглянул на часы. Какова вероятность того, что минутная стрелка показывала в момент пробуждения на промежуток между 10 и 20 минутами?

Решение.

До сих пор мы рассматривали задачи, в которых исходы испытаний образуют конечное множество. Здесь же для каждого часа бесконечное число благоприятных исходов $t \in [10;\ 20]$ выбирается из также бесконечного общего числа исходов $t \in [0;\ 60]$. Вычислим вероятность этого события, используя геометрическую интерпретацию.

Будем считать, что время пробуждения Пети «равномерно распределено» по одному часу. Изобразим геометрическую модель этой ситуации:



Поэтому искомая вероятность равна отношению длины «благоприятного» временного интервала к длине всего рассматриваемого временного интервала: $p(A) = \dfrac{20 - 10}{60} = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: вероятность того, что $t \in [10;\ 20]$, равна $\dfrac{1}{6}$.

Таким образом, в случаях, когда число равновозможных исходов бесконечно, их вероятность можно рассчитать с помощью геометрической интерпретации. Саму вероятность при этом часто называют ***геометрической вероятностью***.

Рассмотрим еще несколько примеров применения геометрических рассуждений в теории вероятностей.

Пример 4.

Аня тратит на прогулку ровно 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 16 и 17 часами. Какова вероятность того, что она вернется домой между 18 и 19 часами?

Решение.

Данное условие будет выполняться, если временной интервал выхода Ани из дома заключен между 16 ч 30 мин и 17 ч. Поэтому искомая вероятность равна отношению длины благоприятного временного интервала к длине всего временного интервала, то есть $p(A) = \dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Ответ: вероятность того, что Аня вернется домой между 18 и 19 часами, равна 0,5.

Пример 5.

На отрезке AB длиной 10 выбраны точки C и D так, что $AC = 2$, $CD = 3$. Какова вероятность того, что:

1) произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке CD;

2)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, пересекается с отрезком CD;

3)* произвольно выбранный отрезок EF длины 1, целиком лежащий внутри AB, целиком лежит также внутри CD?

Решение.

1) Искомая вероятность равна отношению длины благоприятного отрезка CD к длине всего отрезка AB:

$p = 3 : 10 = 0{,}3.$

* * *

2) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку KD, где точка K находится левее точки C на единицу.

Длина отрезка KD равна $3 + 1 = 4$, поэтому $p(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

3) Благоприятным событием является принадлежность левого конца E единичного отрезка EF отрезку CL, где точка L находится левее точки D на 1.

Длина отрезка CL равна $3 - 1 = 2$, поэтому $p(C) = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,3; 0,4; 0,2.

Пример 6.

Один из домов, стоящих на окраине деревни, выходит окнами на футбольное поле. Какова вероятность того, что футбольный мяч, попавший в дом, разобьет стекло в одном из окон (рис. 1)?

Решение.

Будем считать, что мяч попадает в любое место стены дома с одинаковой вероятностью.

Искомая вероятность равна отношению площади «благоприятствующей искомому событию» (то есть площади окон) ко всей площади стены:

$p(A) = \frac{1 + 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$

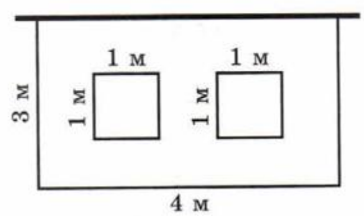


Рис. 1

Ответ: вероятность попадания в окно равна $\frac{1}{6}$.

В последнем примере мы пренебрегли размерами мяча, поскольку иначе он мог бы попасть и в окно, и в стену одновременно. Также мы не рассматривали толщину рамы окна. Вообще в задачах на геометрическую вероятность обычно считается, что размеры предмета очень малы по сравнению с размером места, куда он должен попасть.

Подведем итоги:

Если общее число исходов и число исходов, благоприятствующих событию:

- **велико** – используются ***комбинаторные*** рассуждения и формулы;
- **бесконечно** – используются ***геометрические*** рассуждения и формулы.

К **162** Решите задачи:

1) В ряд выложили красный, синий и зеленый шары. Сколько различных вариантов возможно получить? Сколько среди них вариантов, в которых красный и синий шары окажутся рядом?

2) В ряд выложили красный, синий и зеленый шары. Чему равна вероятность того, что красный и синий шары окажутся рядом?

Как связаны эти задачи между собой?

163 Решите задачу: «В мешок положили четыре карточки с буквами «О», «Р», «М», «Е». Из мешка их вытаскивают по одной карточке и записывают вытащенные буквы подряд. Чему равна вероятность того, что в итоге записи получится слово «МОРЕ»?»

Знания из какого раздела математики помогли вам найти общее число исходов этого испытания? Сделайте вывод.

164 Решите задачу: «На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берет наугад одну карточку. Чему равна вероятность того, что число на карточке будет состоять из разных цифр?» Знания из какого раздела математики помогли вам быстрее найти число благоприятных исходов этого испытания? Сделайте вывод.

165 Из цифр 5, 7, 9 случайным образом составили трехзначное число, используя все цифры. Чему равна вероятность того, что полученное число:

а) делится на 5; б) начинается на 7.

166 Какова вероятность угадать все 6 чисел в лотерее «6 из 49»?

167 Одновременно бросили 3 кубика. Найдите вероятность того, что:

1) на всех кубиках выпадут одинаковые очки;
2) ровно на двух кубиках выпадут одинаковые очки;
3) на всех кубиках выпадут разные очки.

168 У маленького Пети есть два кубика с буквой И, по одному кубику с буквами Ф, З, К, А. Петя выложил кубики в ряд. Какова вероятность того, что он выложил слово «ФИЗИКА»?

169 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

170 В школьной лаборатории 10 микроскопов, два из которых – сломались. Ученик, не зная, что среди них есть сломанные, выбрал для урока 6 микроскопов. Какова вероятность того, что они все – исправные?

171 1) На отрезке AB длиной 20 см выбраны точки C и D так, что $AC = 5$ см, а $CD = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка лежит: а) на отрезке CD; б) на отрезке AC; в) не на отрезке AD?

2) Катя проснулась ночью и взглянула на часы. Какова вероятность того, что минутная стрелка показывала в момент пробуждения на промежуток между 20 и 40 минутами?

Знания из какого раздела математики помогли вам вычислить вероятность в этих задачах? Сделайте вывод.

172 Стрелок, не целясь, стреляет в мишень, площадь которой составляет 300 см^2, и попадает в нее. В центре этой мишени расположен маленький квадрат со стороной 10 см. Найдите вероятность того, что стрелок попал именно в этот квадрат.

П **173** Какие из приведенных событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) при одновременном бросании семи костей на всех выпало разное количество очков;

2) при одновременном бросании семи костей хотя бы на двух из них выпало одинаковое количество очков;

3) при одновременном бросании семи костей на всех выпало одинаковое количество очков;

4) при одновременном бросании семи костей ровно на трех из них выпало одинаковое количество очков;

5) прямая, проходящая через центр квадрата, разделила его на две равные фигуры;

6) прямая, проходящая через центры двух клеток в клетчатой тетради, образует с границами тетради углы в 45°.

174 Определите, какие из приведенных событий A и B являются совместными, а какие – несовместными.

1) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 22», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 36»;

2) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 18», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 18»;

3) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 8», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 1»;

4) Перемножили два натуральных числа: A = «сумма цифр каждого из сомножителей равна 24», B = «сумма цифр произведения этих чисел равна 39».

175 Решите квадратное уравнение устно:

а) $x^2 + 11x - 26 = 0$; б) $x^2 + 32x + 87 = 0$; в) $x^2 - x + 6 = 0$.

176 Уравнение $x^2 - 9x + 15 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $3x_1 + 1$ и $3x_2 + 1$.

177 Для корней x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 6x - 2 = 0$ найдите значения выражений:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.

178 Один из корней квадратного уравнения $x^2 - 2x + c = 0$ равен $1 + \sqrt{5}$. Найдите другой корень и значение параметра c.

179 Разложите на множители квадратные трехчлены:

а) $x^2 + 13x + 12$; б) $-1{,}2x^2 + 5x + 5$; в) $x^2 - 3$; г) $2x^2 + 3x + 4$.

180 Решите задачу:

а) Площадь прямоугольника равна 168 см^2, а его периметр равен 62 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Длины катетов прямоугольного треугольника отличаются на 3 см, а длина гипотенузы больше длины меньшего катета на 6 см. Найдите стороны треугольника.

181 При каких значениях параметра k уравнение $x^2 + 6x + k = 0$ не имеет корней?

182 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a + 2)x + a + 2 = 0$ имеет ровно один корень?

183 При каких значениях параметра m следующее уравнение имеет более двух корней $(m^2 - 7m + 10)x^2 + (m^2 - 4)x + (3m^2 - 2m - 8) = 0$?

184 Хорошо известные вам термины «абсцисса» (лат. слово abscissa – «отрезанная») и «ордината» (лат.слово ordinatum – «по порядку») впервые были употреблены в 1675 г. и в 1694 г. немецким ученым. Расположив наибольшие значения квадратных трехчленов на заданных числовых отрезках в порядке возрастания, узнайте имя этого ученого:

$-0{,}25x^2 + x - 4$ на $[1; 3]$	**Е**	$-x^2 + 10x + 3$ на $[0; 4]$	**Ц**
$0{,}3x^2 + 18x + 2$ на $[-10; -1]$	**Л**	$3x^2 - 6x - 4$ на $[-2; 0]$	**И**
$-5x^2 - x + 1$ на $[-0{,}2; -0{,}1]$	**Н**	$-4x^2 + 20x - 25$ на $[0; 10]$	**Б**
$x^2 - 9x - 1$ на $[0; 4{,}5]$	**Й**		

Д **185** На 90 карточках написаны все числа от 10 до 99 – по одному на каждой карточке. Вася берет наугад одну карточку. Какова вероятность того, что число на карточке будет состоять из нечетных цифр?

186 В урне 10 шаров: 7 белых и 3 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара черные?

187 На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 5$ см, а $CB = 4$ см. Найдите вероятность того, что произвольно выбранная точка отрезка AB лежит на отрезке AC.

188 Каждое утро папа бегает по 1,5 часа и выходит из дома в произвольное время между 5 и 6 часами. Какова вероятность того, что, возвратившись с пробежки, он застанет дома своего сына, который просыпается в 7 утра и уходит в школу в 8 часов?

189 Какие из приведенных событий являются достоверными, невозможными, случайными:

1) первый дождь следующей весной начнется в четверг;
2) 27 мая в Москве будет $+40^\circ$ C;
3) 27 мая в Москве будет меньше $+40^\circ$ C.

190 Какие из приведенных событий A и B являются совместными, а какие – несовместными:

1) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 21 минуту»;

2) В лыжных гонках: A = «победитель пробежал дистанцию за 23 минуты», B = «пришедший вторым – за 24 минуты»;

3) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырехугольника», B = «нарисованы только треугольники»;

4) В учебнике на пятой странице: A = «нарисованы 3 четырехугольника», B = «нарисованы только прямоугольники».

191 Решите устно квадратное уравнение:

а) $x^2 + 18x + 32 = 0$; б) $x^2 - 6x - 91 = 0$; в) $x^2 + x + 5 = 0$.

192 Для корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$ найдите значения выражения $x_1^2 + x_2^2$.

193 Разложите на множители квадратные трехчлены, если это возможно:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $-9x^2 + 3x + 2$; в) $x^2 - 5$; г) $-x^2 + 2x - 5$.

194 Площадь прямоугольника равна 360 м^2, а его периметр равен 76 м. Найдите стороны прямоугольника.

195 При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - 8x - t = 0$ не имеет корней?

196 При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + (a - 1)x + a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

С **197*** Два друга-математика договорились встретиться в условленном месте с 12:00 до 13:00. Каждый из них собирается прийти в случайный момент времени из этого промежутка и прождать 10 минут. Какова вероятность того, что они встретятся?

198* На гранях каждого из 27 кубиков произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Вася сложил куб, причем так, что у любых двух кубиков на соприкасающихся гранях записаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Вася подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней (этого куба). Мог ли он получить шесть одинаковых сумм?

Экспресс-тест № 2

Примерное время выполнения – 45 минут

Часть А

№ 1

№1. Число 15! делится на:

А) 17; Б) 99; В) 51; Г) 46.

№ 2

№2. В параллели восьмых классов 15 мальчиков успешно занимаются по физике. Сколькими способами можно выбрать из них 8 ребят для участия в олимпиаде по физике?

А) 40 320 способов; В) 6435 способов;

Б) 12 870 способов; Г) 32 432 400 способов.

№ 3

№3. В восьмом классе учатся 14 мальчиков и 12 девочек. По жребию они выбирают дежурного. Какова вероятность того, что это будет мальчик?

А) $\frac{7}{13}$; Б) $\frac{1}{14}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{6}{13}$.

№ 4

№4. Наблюдения технического контроля показывают, что вероятность обнаружения бракованных лампочек составляет около 0,015. Сколько бракованных лампочек можно ожидать в партии из 2000 лампочек?

А) 15; Б) 30; В) 45; Г) 133.

Экспресс-тест № 2

Часть В

№ 5		

№5. В цветочном магазине продавец расставляет в ряд вазы с цветами: гвоздиками, хризантемами, ромашками, фиалками. Хризантем и ромашек было очень много. Продавец распределил хризантемы поровну в три вазы, а ромашки – в две. Сколько существует различных вариантов расстановки ваз с цветами, если:

1) цветы в каждой из ваз отличаются от другой по цвету;

2) ромашки в каждой из ваз отличаются от другой по цвету, а хризантемы – нет;

3) хризантемы в каждой из ваз отличаются от другой по цвету, а ромашки – нет.

Установите соответствие между номерами указанных ситуаций и количеством полученных для нее различных вариантов расстановки ваз:

А) 840 вариантов; Б) 2520 вариантов; В) 5040 вариантов.

№ 6

№6. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 6, 7, 8, 9 (цифры в записи числа не повторяются)?

А) 60; Б) 24; В) 54; Г) 48.

№ 7

№7. На координатной прямой отмечены точки $O(0)$, $S(3)$, $T(8)$, $F(20)$. Точка X бросается наугад на отрезок OF. Какова вероятность того, что точка X попадет на отрезок ST?

А) 0,25; Б) 0,5; В) 0,75; Г) $\frac{11}{20}$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. В новой упаковке должно быть 30 футболок одного размера. Но оказалось, что среди них есть три футболки другого размера. Продавец наугад взяла 25 футболок, чтобы пополнить витрину. Какова вероятность того, что они все – одного размера?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5			№ 6	№ 7
Б	В	А	Б	1	2	3	Г	А
				В	А	Б		

№ 8

$$p(A) = C_{27}^{25} : C_{30}^{25} = \frac{26 \cdot 27}{1 \cdot 2} : \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{406}.$$

Ответ: вероятность того, что все взятые футболки одного размера, равна $\frac{1}{406}$.

Шкала успешности:

9 – 10 баллов – *отлично*

7 – 8 баллов – *хорошо*

5 – 6 баллов – *удовлетворительно*

§ 3*. Метод математической индукции

1*. Принцип математической индукции

...наши самые большие надежды мы можем возлагать на наблюдения; они непрерывно будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать... Мы должны пользоваться таким открытием как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы можем научиться кое-чему полезному.

Леонард Эйлер (1707 – 1783),
швейцарский, немецкий и российский математик и механик

Изучая математику, мы знакомимся с различными свойствами и правилами, справедливыми для бесконечного множества элементов (чисел, геометрических фигур и т.д.). Следует понимать, что они не возникали в науке сразу в своем конечном виде. Все они прошли долгий путь: от наблюдения и выявления закономерностей к выдвижению гипотез и их доказательству. На заре математики многие факты были открыты именно так – переходом от рассмотрения нескольких (иногда и нескольких сотен) частных примеров к общему выводу. Напомним, что такой способ рассуждения называют индукцией: от лат. «наведение», то есть получение общего вывода, «наведенного» (подсказанного) отдельными примерами.

Наверняка именно так было открыто и свойство суммы первых нечетных чисел натурального ряда. Попробуем открыть это свойство и мы. Обозначим сумму n первых нечетных чисел и рассмотрим несколько таких сумм. При $n = 1$ имеем $S_1 = 1$; при $n = 2$ сумма $S_2 = 1 + 3 = 4$; при $n = 3$ она равна $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$. Продолжая рассматривать такие суммы: $S_4 = 16$; $S_5 = 25$; $S_6 = 36$, заметим, что при $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ сумма первых нечетных чисел равна квадрату их количества. Выдвинем гипотезу, что и для всех n нечетных чисел $S_n = n^2$.

Ясно, что перебрать все оставшиеся элементы невозможно, ведь мы говорим о бесконечном множестве, а известные нам способы доказательства общих утверждений, например, введение обозначений, здесь не годятся.

В этом пункте мы узнаем способ, который поможет доказать эту гипотезу и многие другие подобные ей утверждения без перебора всех элементов бесконечного множества. Его идею «подсмотрим» в жизни.

Для организации, например, игры в сломанный телефон (игра заключается в передаче друг другу по цепочке слова, загаданного ведущим), мы не подходим по очереди к каждому из игроков со словами: «Передай слово второму игроку», «Передай слово третьему игроку», ... и т.д. Мы знакомим всех игроков с правилом: «Передай следующему игроку слово, которое услышишь». После чего, сказав нужное слово первому человеку, мы «запускаем» игру. Итак, организовав взаимодействие только между соседями, мы можем связать друг с другом всех игроков и даже бесконечный их ряд.

Теперь применим эту идею для доказательства простейшего общего утверждения об элементах бесконечного множества.

Задача 1.

Докажите, что n-е по порядку нечетное число равно $2n - 1$ (при любом натуральном n).

Доказательство.

Обозначим n-е по порядку нечетное число a_n, тогда нам нужно доказать истинность общего утверждения: $\forall\ a_n,\ n \in N$: $a_n = 2n - 1$.

Мы можем убедиться, что для первого нечетного числа это утверждение истинно с помощью непосредственной подстановки. Действительно, $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, единица это и есть первое нечетное число. Понятно, что осуществить такую же проверку для бесконечного числа остальных нечетных чисел у нас не получится.

Но мы можем легко доказать следование:

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2(n + 1) - 1.$$

Мы знаем, что следующее за нечетным числом отличается от предыдущего нечетного числа на 2, поэтому $a_{n+1} = a_n + 2$. Полагая, что $a_n = 2n - 1$ истинно, можно доказать, что $a_{n+1} = a_n + 2 = 2n - 1 + 2 = 2(n + 1) - 1$.

Доказав это следование для двух любых соседних нечетных чисел, мы фактически доказали и бесконечную цепочку:
$a_1 = 2 \cdot 1 - 1$ истинно $\Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 1$ истинно; $a_2 = 2 \cdot 2 - 1$ истинно $\Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 1$ истинно; ... $a_{1000000} = 2 \cdot 1\ 000\ 000 - 1$ истинно $\Rightarrow a_{1000001} = 2 \cdot 1\ 000\ 001 - 1$ истинно,... $a_n = 2n - 1$ истинно $\Rightarrow a_{n+1} = 2(n + 1) - 1$ истинно, ... и т.д. Ведь истинность первого утверждения мы уже проверили.

Итак, отталкиваясь от истинности утверждения для первого нечетного числа и пользуясь доказанным следованием для пары соседних нечетных чисел, мы можем «пробежаться» по всему бесконечному ряду нечетных чисел.

Выделение этой идеи как важного способа доказательства свойств на бесконечных множествах приписывают Б. Паскалю и Я. Бернулли, хотя отдельные случаи его применения встречались еще в античные времена. Теперь он носит название **принципа математической индукции.** В общем виде его можно сформулировать так.

Пусть некоторое высказывание A_n, в формулировку которого входит натуральное число n, истинно при $n = 1$, и из истинности A_n при произвольном натуральном n следует истинность A_{n+1}. Тогда высказывание A_n истинно при любом натуральном n.

Иными словами, истинность A_n при любом натуральном n следует из бесконечной цепочки следствий: A_1 истинно $\Rightarrow A_2$ истинно; A_2 истинно $\Rightarrow A_3$ истинно; A_3 истинно $\Rightarrow A_4$ истинно; ... , A_n истинно $\Rightarrow A_{n+1}$ истинно, ... и т.д.

Теперь мы готовы к тому, чтобы вернуться к свойству суммы n первых нечетных чисел. Докажем его, применяя принцип математической индукции.

1) Как мы видели, $S_1 = 1 = 1^2$. Значит, для $n = 1$ утверждение верно.

2) Предположим, что $S_n = n^2$ истинно при произвольном натуральном n.

3) Опираясь на это предположение, докажем, что $S_{n+1} = (n + 1)^2$.

Мы уже знаем, что n-е нечетное число равно $2n - 1$, значит, $(n + 1)$-е нечетное число равно $2(n + 1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$.

Тогда, $S_{n+1} = S_n + (2n + 1)$. По предположению индукции $S_n = n^2$, тогда $S_{n+1} = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Исходя из принципа математической индукции, можно утверждать, что $S_n = n^2$ истинно при любом натуральном n. ■

Итак, на основании принципа математической индукции мы можем сформулировать следующий метод доказательства.

Чтобы доказать, что утверждение верно при любом $n \in N$
методом математической индукции[1] нужно:

1) Проверить, что это утверждение выполняется для $n = 1$ (этот шаг доказательства называют *база индукции*).
2) Предположить, что это утверждение выполняется для произвольного n – *предположение индукции*.
3) Опираясь на предположение индукции, доказать, что это утверждение выполняется для $n + 1$ – *шаг индукции*.

Метод математической индукции может применяться при доказательстве равенств о натуральных числах.

Пример 1.

Доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ имеем: $1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ – утверждение верно.

2) Пусть равенство выполняется для произвольного n:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3) Рассмотрим сумму $n + 1$ первых слагаемых, $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$. Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, то есть $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

По предположению индукции $S_{n+1} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$. Вынесем за скобки $\dfrac{n+1}{6}$ и разложим на множители квадратный трехчлен, полученный в скобках:

$$S_{n+1} = \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \blacksquare$$

Рассмотренное нами в этом примере равенство было выведено еще Архимедом в III веке до н.э. Он использовал его для решения некоторых задач из геометрии и механики.

Пример 2.

Доказать, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ имеем: $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$ – утверждение верно.

2) Пусть равенство выполняется при произвольном n. Напомним, что здесь и далее искомую сумму n слагаемых, рассматриваемых в утверждении, мы обозначаем S_n, поэтому, $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

3) Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = ((n+1)+1)!$. Для суммы со следующим натуральным числом $n+1$ будет верно:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) \cdot (n+1)!.$$

Тогда по предположению индукции:

$$S_{n+1} = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)! + (n+1)(n+1)! - 1.$$

[1] Отметим, что существуют и более сложные виды индукции. Например, когда утверждение A_n следует из всех предыдущих утверждений $A_1 - A_{n-1}$. С еще одним примером индукции вы познакомитесь в примере 7 следующего пункта.

Вынесем за скобки множитель $(n+1)!$ и воспользуемся определением факториала:

$$S_{n+1} = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1. \blacksquare$$

Как мы видим, основного труда требует доказательство шага индукции: здесь мы используем различные преобразования и рассуждения, база же и предположение индукции не требуют от нас особых усилий.

Пример 3.

Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ при всех $n \in N$.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ имеем: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$ – утверждение верно.

2) Пусть при произвольном n выполняется равенство:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

3) Нам нужно проверить равенство $S_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$. Для $n+1$ выполняется: $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Тогда по предположению индукции:

$$S_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}. \blacksquare$$

Конечно, большинство подобных равенств можно доказать и без применения математической индукции, но для этого нужно применять нестандартные рассуждения. Например, для нахождения значения суммы из последнего примера нужно было заметить, что при любом натуральном k имеет место равенство

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \qquad (1).$$

Тогда при любом натуральном n

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}.$$

Однако догадаться до равенства (1) не так-то просто, а доказательство методом математической индукции требует от нас стандартных рассуждений.

Рассмотрим примеры применения метода математической индукции для доказательства различных неравенств.

Пример 4.

Доказать, что при $\alpha > -1$ и при всех натуральных n выполняется неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ имеем $1 + \alpha \geqslant 1 + \alpha$, получили верное нестрогое неравенство.

2) Пусть при произвольном натуральном n выполняется неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

3) Докажем, что неравенство выполняется для следующего натурального числа $n+1$. Оценим $(1+\alpha)^{n+1}$. По свойству степеней $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha)$, и,

так как по условию $1 + \alpha > 0$ и по предположению индукции $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$, то $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) \Leftrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \Leftrightarrow (1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\alpha$. ■

Отметим, что многие высказывания A_n выполняются не при всех натуральных n, а только начиная с некоторого их значения. Так, неравенство $1000n^2 + 3n < n^3 - 4$ не является верным, когда $n < 10$, но будет верным, например, при всех $n \geqslant 2000$.

Расширим принцип математической индукции следующим образом.

Пусть некоторое высказывание A_n, в формулировку которого входит целое число $n \geqslant n_0$, где n_0 – фиксированное целое число, истинно при $n = n_0$, и из истинности A_n при произвольном целом $n \geqslant n_0$ следует истинность A_{n+1}. Тогда высказывание A_n истинно при любом целом $n \geqslant n_0$.

Пример 5.

Доказать, при всех натуральных $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}.$$

Доказательство (методом математической индукции).

В отличие от предыдущих примеров база индукции будет строиться для $n = 2$.

1) При $n = 2$ имеем: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ – неравенство $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{7}{12}$ справедливо как нестрогое.

2) Пусть при произвольном натуральном $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}.$$

3) Докажем, что $S_{n+1} \geqslant \frac{7}{12}$.

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Но $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, значит, $S_{n+1} > S_n$. При этом $S_n \geqslant \frac{7}{12}$ (по предположению индукции). Значит, $S_{n+1} \geqslant \frac{7}{12}$ (в действительности мы также доказали, что равенство при этом будет выполняться только при $n = 2$). ■

* * *

Пример 6.

При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n > n^3$?

Решение.

Для начала рассмотрим несколько частных примеров при первых значениях n. Имеем: $2^1 > 1^3$, $2^2 < 2^3$, $2^3 < 3^3$, $2^4 < 4^3$, $2^5 < 5^3$. Казалось бы, неравенство $2^n > n^3$ верно только для $n = 1$, а при $n \geqslant 2$ должно выполняться противоположное неравенство $2^n < n^3$.

Рассмотрим несколько отношений левой части неравенства к правой при $n = \{2, 3, \ldots 10\}$: $\frac{2^2}{2^3} = 0{,}5$; $\frac{2^3}{3^3} \approx 0{,}296$; $\frac{2^4}{4^3} = 0{,}25$; $\frac{2^5}{5^3} = 0{,}256$; $\frac{2^6}{6^3} \approx 0{,}296$; $\frac{2^7}{7^3} \approx 0{,}373$; $\frac{2^8}{8^3} = 0{,}5$; $\frac{2^9}{9^3} \approx 0{,}702$; $\frac{2^{10}}{10^3} = 1{,}024 > 1$. Замечаем, что, начиная с $n = 5$, отношение $\frac{2^n}{n^3}$ начинает увеличиваться и при $n = 10$ это отношение становится больше 1 и, судя по всему, при следующих значениях n оно становится еще больше.

Сформулируем гипотезу: $2^n > n^3$ при всех натуральных $n \geqslant 10$ и докажем ее методом математической индукции.

1) При $n = 10$ неравенство выполнено $(1024 > 1000)$.

2) Пусть при произвольном $n \geqslant 10$ выполняется неравенство $2^n > n^3$.

3) Докажем, неравенство для следующего натурального числа $n+1$: $2^{n+1} > (n+1)^3$.

3.1. Из предположения индукции верно: $2^n > n^3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n > 2n^3 \Leftrightarrow 2^{n+1} > 2n^3$.

3.2. Заметим, что при всех натуральных $n \geqslant 10$ верно неравенство $2n^3 > (n+1)^3$.

Докажем, что это так. Во-первых, так как $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, то неравенство $2n^3 > (n+1)^3$ равносильно неравенству $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. Во-вторых, при $n \geqslant 10$ $n^3 = n \cdot n^2 \geqslant 10n^2 > 7n^2 = 3n^2 + 3n^2 + n^2 > 3n^2 + 3n + 1$, то есть выполнено неравенство $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$, а вместе с ним и равносильное ему неравенство $2n^3 > (n+1)^3$.

3.3. Итак, $2^{n+1} > 2n^3$ и $2n^3 > (n+1)^3$, значит, $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Ответ: неравенство $2^n > n^3$ выполняется при $n = 1$ и при $n \geqslant 10$.

К **200** Каждому значению аргумента x поставлено в соответствие $y = x^2 - 2$. Какое значение функции будет соответствовать аргументу 0; 3; n; $n+1$?

201 Введите обозначения и запишите на математическом языке:

а) любое четное число;

б) любое нечетное число;

в) два любых последовательных натуральных числа;

г) три любых последовательных натуральных числа;

д) два любых последовательных четных числа.

202 Докажите следующее утверждение: «Сумма трех последовательных натуральных чисел кратна 3».

203 1) Для доказательства истинности общего утверждения A: «Произведение числа n и двух следующих за ним чисел кратно 6» выполните следующие шаги:

а) проверьте истинность данного утверждения для $n = 1$;

б) запишите на математическом языке, что утверждение истинно для числа n;

в) при условии, что утверждение истинно для числа n, докажите, что оно истинно и для $n + 1$;

2) Проанализируйте шаги, выполненные в пунктах 1а – 1в. Объясните как, пользуясь истинностью $A(1)$ и доказанным следованием $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, можно провести бесконечную цепочку рассуждений:

$A(1)$ истинно $\Rightarrow A(2)$ истинно;

$A(2)$ истинно $\Rightarrow A(3)$ истинно; ...

$A(100)$ истинно $\Rightarrow A(101)$; ...

$A(n)$ истинно $\Rightarrow A(n+1)$ истинно, ...

3) Можно ли использовать данный метод доказательства для других общих утверждений на бесконечном множестве? Сформулируйте шаги, которые были предприняты для доказательства в общем виде. Сравните свой вариант с алгоритмом в учебнике на стр. 62.

204 Докажите тождество: $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

205 Докажите тождество: $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

206 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство: $2^n > n$.

207 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство: $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \geqslant \dfrac{4^n}{n+1}$.

П **208** Сколькими способами семь членов комиссии могут выбрать председателя и заместителя?

209 Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7?

210 Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 5, 6, 7, если каждая цифра в записи числа встречается один раз? (Число не может начинаться с нуля.)

211 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{\sqrt{27}+4}\cdot\sqrt{\sqrt{27}-4}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{11}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{11}+3}}{\sqrt{32}}$.

212 Сократите дроби:

а) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2\sqrt{xy}+y}$; в) $\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$.

213 Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x+1)(x-5)>0$;

б) $x(1-x)(x+4)\geqslant 0$;

в) $x^2-64<0$;

г) $x^6(x-3)(x+2)<0$;

д) $x^2-x-12<0$;

е) $-5x^2+2x+3\geqslant 0$;

ж) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}\leqslant\dfrac{1}{x-1}$;

з) $\dfrac{(x-6)(x^2-4)}{12x^2-4x-1}>0$.

214 При каких значениях x выражение $\dfrac{5}{\sqrt{-6x^2-5x+1}}$ имеет смысл?

215 Решите систему неравенств: $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2-9}-\dfrac{4}{x+3}\leqslant 0\\ x^2-3x-10<0\end{cases}$.

216 Решите задачу:
Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 4 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 6 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

217 Для натуральных n докажите тождество: $1^3+2^3+\ldots n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

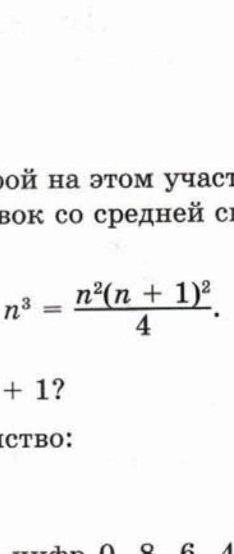
218 При каких натуральных n выполняется неравенство $2^n>2n+1$?

219 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство:

$\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

220 Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 8, 6, 4, 9 (цифры в записи числа не повторяются)?

221 Сколько девятизначных паролей можно составить из букв A, B, C, D, W, где буквы A, C встречаются ровно один раз, буквы B и D – по два раза, а буква W – три раза?



222 На полке в магазине лежало 20 шоколадных яиц с игрушкой сюрпризом внутри, среди которых 4 были с машинками. Мама купила в подарок детям 15 таких яиц. Какова вероятность того, что она приобрела подарки без машинок?

223 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{\sqrt{45}+6}\cdot\sqrt{\sqrt{45}-6}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2}}{\sqrt{44}}$.

224 Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x+7)(x+9)<0$; в) $x^2-100>0$; д) $\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x+4}>0$;

б) $\dfrac{(x-7)(x+3)}{x(x-1)}\leqslant 0$; г) $x^2-9x+18<0$; е) $\dfrac{(x-7)^2(x+1)}{(1-x)^3}\geqslant 0$.

225 При каких значениях x выражение $\sqrt{-7x^2-4x+3}$ имеет смысл?

226 Решите задачу:

Пристани A и B расположены на реке, скорость течения которой на этом участке равна 3 км/ч. Лодка проходит от A до B и обратно без остановок со средней скоростью 8 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

C **227*** Найдите значение выражения

$$1!\cdot 3-2!\cdot 4+3!\cdot 5-4!\cdot 6+\ldots-2000!\cdot 2002+2001!.$$

228* Известно, что при некотором x число $x+\dfrac{1}{x}$ – целое. Докажите, что $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n.

2*. Применение метода математической индукции в разных задачах

Без помощи... индукции... процесс конструирования был бы бессилен создать науку.

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, физик, философ и теоретик науки

В предыдущем пункте мы познакомились с замечательным принципом, который позволяет заменить невозможную на практике проверку бесконечного числа элементов множества стандартным пошаговым алгоритмом действий – методом математической индукции. Мы применяли этот метод при доказательстве равенств и неравенств. Однако этим круг применения метода математической индукции, конечно, не ограничивается. В этом пункте мы поучимся применять его при решении самых разнообразных задач.

Применим метод математической индукции к решению задач о множествах.

Пример 1.

Доказать, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

Доказательство (методом математической индукции).

1) Проверим утверждение для $n=1$. Если в множестве один элемент, то оно содержит ровно 2 подмножества – само себя и пустое множество: $2=2^1$.

2) Предположим, что число подмножеств множества из n элементов равно 2^n.

3) Рассмотрим множество из $n + 1$ элементов. Если число подмножеств множества из n элементов равно 2^n, то число подмножеств множества из $n + 1$ элементов вдвое больше. Действительно, наряду с уже рассмотренными 2^n подмножествами множества из n элементов в этом множестве выделить еще столько же, отличающихся от них новым $(n + 1)$-ым элементом. Значит, число подмножеств множества из $n + 1$ элементов равно $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Утверждение доказано.

Применим метод математической индукции к решению задач на делимость.

Пример 2.

Доказать, что при любом $n \in N$ число $n^5 - n$ делится нацело на 5.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ число $1^5 - 1 = 0$ – делится на 5.

2) Пусть при произвольном натуральном n число $n^5 - n$ делится нацело на 5.

3) Докажем $(n + 1)^5 - (n + 1)$ делится на 5.

Раскрывая скобки в выражении $(n + 1)^5$, имеем:

$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = n^5 - n + 5n^4 +$ $+ 10n^3 + 10n^2 + 5n$.

Разность $n^5 - n$ делится на 5 по предположению индукции, остальные слагаемые делятся на 5 (по свойству делимости произведения). Поэтому число $(n + 1)^5 - (n + 1)$ делится нацело на 5. ■

Пример 3.

Доказать, что при любом $n \in N_0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится нацело на 133.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 0$ число $11^2 + 12 = 133$ – делится нацело на 133.

2) Пусть при произвольном $n \in N_0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

3) Докажем, что $11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1}$ делится на 133. Преобразуем это выражение:

$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} =$

$= 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} - 11 \cdot 12^{2n+1} + 144 \cdot 12^{2n+1} =$

$= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1}$.

Выражение $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 по предположению индукции, значит, первое слагаемое делится на 133, при этом последнее слагаемое также делится на 133. Поэтому число $11^{n+3} + 12^{2n+3}$ делится на 133. ■

Пример 4.

Доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ число 2^{2^n} имеет последнюю цифру 6.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 2$ число $2^{2^2} = 2^4 = 16$ – утверждение верно.

2) Пусть при произвольном натуральном $n \geqslant 2$ число 2^{2^n} оканчивается цифрой 6, то есть $2^{2^n} = 10k + 6$, $k \in N$.

3) Докажем, что 2^{2^n} оканчивается цифрой 6.

$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^{2^n})^2 = (10k + 6)^2 = 100k^2 + 120k + 36 = 10(10k^2 + 12k + 3) + 6 =$ $= 10m + 6$, где $m \in N$; поэтому число $2^{2^{n+1}}$ также оканчивается цифрой 6. ■

Пример 5.

Доказать, что любое натуральное число $n \geqslant 8$ можно представить в виде $n = 3p + 5q$, где p, q – целые неотрицательные числа.

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 8$ утверждение верно ($8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$).

2) Пусть произвольное натуральное число $n \geqslant 8$ представимо в виде $n = 3p + 5q$, где $p,\ q = \{0,\ 1,\ 2, ...\}$ – целые неотрицательные числа.

3) Докажем, что следующее за ним число $n + 1$ можно представить указанным способом.

По предположению индукции $n + 1 = 3p + 5q + 1$. Представим это число следующим образом: $n + 1 = 3p + 5q + 1 = 3p + 5q + 6 - 5 = 3(p + 2) + 5(q - 1)$.

Если $q \geqslant 1$, то $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1 = p + 2$, $q_1 = q - 1$ – целые неотрицательные числа. Если же $q = 0$, то $n = 3p$ и $n + 1 = 3p + 1$, причем, так как $n = 3p$ и $n \geqslant 8$, то $p \geqslant 3$. Тогда $n + 1 = 3p + 1 = 3p - 9 + 10 = 3(p - 3) + 5 \cdot 2$, то есть опять-таки $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1 = p - 3$, $q_1 = 2$ являются целыми неотрицательными числами.

Итак, в любом случае $n + 1 = 3p_1 + 5q_1$, где $p_1,\ q_1 = \{0,\ 1,\ 2, ...\}$. ■

Отметим, что в нашей стране во времена СССР были в обращении различные мелкие монеты, в частности монеты достоинством в 3 коп. и 5 коп. Только что рассмотренный нами пример в литературе того времени формулировался так: доказать, что любую сумму денег, не меньшую восьми копеек, можно разменять монетами в 3 и 5 копеек.

Применим метод математической индукции к решению геометрических задач.

Пример 6.

На плоскости проведены n прямых ($n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$), находящихся в общем положении, то есть никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Доказать, что эти прямые разбивают плоскость на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ частей (так как из чисел n и $n + 1$ одно обязательно четное, то записанная дробь является целым числом).

Доказательство (методом математической индукции).

1) При $n = 1$ имеем $1 + \dfrac{1 \cdot 2}{2} = 2$ (одна прямая разбивает плоскость на 2 части, что соответствует действительности).

2) Пусть n прямых при произвольном натуральном n разбивают плоскость на $1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ частей. Для простоты дальнейших рассуждений обозначим это число частей A_n.

3) Рассмотрим $n + 1$ прямых на плоскости в общем положении и выделим из них произвольные n прямых. Они находятся в общем положении и по предположению индукции разбивают плоскость на A_n частей. Тогда $(n + 1)$-я прямая, которая изображена штриховой линией на рисунке 1, пересечет каждую из этих n прямых равно в одной точке. При этом сама прямая разделится на $n + 1$ частей (на 2 луча и на $n - 1$ отрезков).

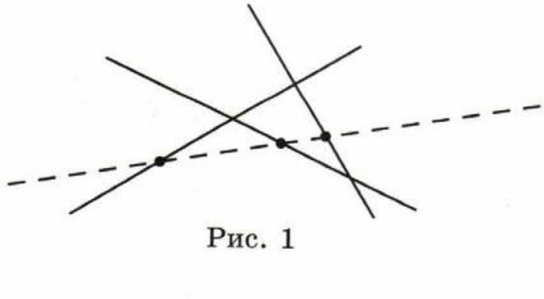


Рис. 1

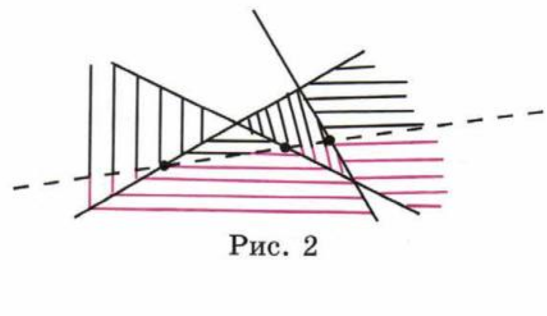


Рис. 2

В итоге из имевшихся A_n частей плоскости ровно $n + 1$ частей разделится на две (они помечены штриховкой на рисунке 2), а остальные не будут затронуты. Поэтому после проведения $(n + 1)$-й прямой количество частей плоскости увеличится на $n + 1$, и $A_{n+1} = A_n + n + 1$.

Тогда по предположению индукции:

$A_{n+1} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = 1 + (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, то есть нужное равенство выполняется для следующего значения $n + 1$. ■

Как мы видим, метод математической индукции является ключом к решению огромного количества задач. Он еще не раз пригодится нам в дальнейшем – особенно при открытии новых свойств.

Пример 7.

Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

Доказательство (методом математической индукции).

1) На рисунке 3 показано, как разрезать квадрат на 6, 7 и 8 квадратов.

2) Пусть мы умеем разрезать квадрат на $n = k$ квадратов.

3) Тогда, разрезав один из квадратов на 4 квадрата, мы получим, что исходный квадрат будет разрезан на $n = k + 3$ квадратов, т. е. мы показали, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

Заметим, что в этом примере нам пришлось проверять базу индукции сразу для трех утверждений, так как переход индукции осуществляется от утверждения A_n к утверждению A_{n+3}.

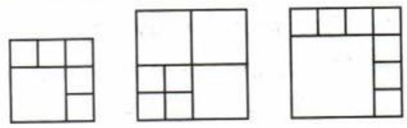


Рис. 3

229 Докажите, что при любом натуральном n число $n^2 + n$ является четным.

230 Докажите, что при любом натуральном n число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится нацело на 16.

231 Приведите пример натурального числа, которое равно сумме: а) трех своих различных делителей; б) ста своих различных делителей. В задаче не требуется, чтобы число равнялось сумме всех своих делителей.

232 На столе стоят 16 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

233 Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

234 Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

235 Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавиш рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков?

236 Решите неравенство:

а) $x^2 - 8x \leqslant 0$;
б) $5x^2 + x - 4 \geqslant 0$;
в) $4x^2 + 12x + 9 > 0$;
г) $-x^2 + 10x - 25 \geqslant 0$;
д) $-3x^2 + x - 1 \leqslant 0$;
е) $x^2 + 2x + 4 < 0$.

237 Решите двойное неравенство $-2 < \frac{x-1}{x+2} \leqslant 0$.

238 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 4x \leqslant 21 \\ x^2 + 5x > 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x - 4| < 7 \\ x^2 + x \geqslant 30 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 5 \\ |x^2 - 7x + 10| < 10 \end{cases}$.

239 Докажите неравенство: $(d - 7)^2 > (d - 8)(d - 6)$.

240 Решите задачу:
Расстояние между городами A и B равно 490 км. Из города A в город B со скоростью 55 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

D **241** Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 - n$ делится нацело на 6.

242 Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.

243 а) Из квадрата клетчатой бумаги размером 4×4 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

б) Из квадрата клетчатой бумаги размером 512×512 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.

244 Сколькими способами можно выбрать четырех дежурных из группы в 30 человек?

245 Решите неравенство:

а) $x^2 - 18x + 72 \leqslant 0$;

б) $2x^2 + x + 4 < 0$;

в) $-x^2 + 26x - 169 \geqslant 0$;

г) $6x^2 - 5x + 4 > 0$.

246 Решите двойное неравенство $0 \leqslant \frac{x+4}{x-2} \leqslant 4$.

247 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 14x < 51 \\ x^2 - 21x + 54 \leqslant 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x| > 8 \\ x^2 + 4x \leqslant 45 \end{cases}$.

248 Докажите неравенство: $(p - 13)^2 > (p - 10)(p - 16)$.

249 Решите задачу:
Расстояние между городами A и B равно 750 км. Из города A в город B со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города B автомобили встретятся?

C **250*** У Пети в копилке 1000 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей на общую сумму 2000 рублей, причем монет каждого достоинства не менее 10. Докажите, что количество однорублевых монет — составное число.

Задачи для самоконтроля к Главе 1

251 а) Сколько четырехзначных кодов можно составить из цифр 7, 8, 9 и буквы Ф, если цифры и буква не повторяются?

б) Сколько семизначных кодов можно составить из цифр 7, 8, 9 и буквы Ф, если цифры 7 и 9 встречаются в коде 1 раз, цифра 8 повторяется два раза, буква Ф – три раза?

252 Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове: а) «ФУНКЦИЯ»; б) «ПРОПОРЦИЯ»; в) «ДИСКРИМИНАНТ» («словом» считать даже бессмысленный набор букв)?

253 Для организации конкурса «Алло, мы ищем таланты!» на ученический совет школы от каждого класса приглашена инициативная группа из 4 человек по направлениям: музыка, поэзия, песня, танец. В 9 «Б» классе учится 25 человек. Сколькими способами можно сформировать группу-делегацию на совет школы?

254 В 9 «А» классе 10 учащихся успешно занимаются физикой. Сколькими способами можно выбрать из них троих для участия в олимпиаде по физике?

255 Для проведения военно-спортивного праздника, посвященного Дню Победы, от каждого класса выдвигается 7 участников. Сколькими способами можно составить такую группу от класса, в котором учится 26 человек?

256 Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8 (цифры в записи числа не повторяются)?

257 Для праздничной лотереи выпустили 2400 билетов, из которых 560 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

258 В партии из 20 000 телефонов 100 оказались бракованными. Какова вероятность приобрести исправный телефон из этой партии?

259 Ученика попросили назвать трехзначное число. Какова вероятность того, что он назовет число, оканчивающееся на 0?

260 Мама испекла 15 пирожков, на два из них мясной начинки не хватило, и мама положила в них варенье. Папа наугад взял 6 пирожков. Какова вероятность того, что все взятые им пирожки с мясом?

261 В круге радиусом 6 см размещен прямоугольник 3 на 4 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в круг, окажется внутри прямоугольника? Ответ округлите до сотых.

262 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + 5y = (x - 2)^2 - 20 \\ 4x + y = -8 \end{cases}$; в) $\begin{cases} |x - 2| - 2y = 8 \\ 6x - y = 3 \end{cases}$.

263 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} (x - 3)^2 < (x + 6)^2 \\ 5x + 12 \geqslant 4x - 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (3 - x)(\sqrt{5} - x) > 0 \\ 0{,}5x < 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 + 16 < (x - 6)^2 \\ (3 - \sqrt{10})x \geqslant \dfrac{5}{3 + \sqrt{10}} \end{cases}$.

264 Решите неравенство $3 < 4 - \frac{3}{4}x \leqslant 5$.

Задачи для самоконтроля

265 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств:
$\begin{cases} 2x - 3y - 6 < 0 \\ -2x + y + 6 \geqslant 0 \end{cases}$.

266 Расположите числа $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$ в порядке убывания.

267 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{1{,}8} \cdot \sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}$; г) $(\sqrt{5} - 4)(4 + \sqrt{5})$;

б) $-\sqrt{32}(\sqrt{2} - \sqrt{8})$; д) $\sqrt{69 - 16\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$;

в) $(\sqrt{7} - \sqrt{11})^2$; е) $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{18} - 2\sqrt{2}}$.

268 Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{2x^2 - 36x + 162}$, если $x < 9$.

269 Решите уравнения:

а) $(x - 5)^2 = 100$; в) $x^2 - 12x + 36 = 0$; д) $x^2 + 30x = 99$;

б) $7x^2 - 3x = 0$; г) $x^2 - x + 2 = 0$; е) $x^2 + 2\sqrt{51} \cdot x + 26 = 0$.

270 Решите уравнения:

а) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; б) $|x^2 - 17| = 8$.

271 Если возможно, разложите квадратный трехчлен на множители:

а) $2x^2 - 9x - 5$; б) $5x^2 + 2x + 1$.

272 Пусть x_1, x_2 корни уравнения $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$.

273 При каких значениях параметра m уравнение $(m - 2)x^2 + (4m - 2)x + 3m = 0$ имеет ровно одно решение?

274 Квадратичная функция задана формулой $y = x^2 - 4x - 5$. Напишите уравнение прямой, относительно которой симметричен график этой функции.

275 Решите неравенства:

а) $49x^2 - 16 \geqslant 0$; г) $x^2 - 2x + 10 < 0$; ж) $(x + 5)(x - 6) \leqslant 0$;

б) $5x^2 + 8x \leqslant 0$; д) $-9x^2 + 30x - 25 \geqslant 0$; з) $x(8 - x)(9 + x) \geqslant 0$;

в) $x^2 - 19x + 18 > 0$; е) $-8x^2 - 4x - 1 < 0$; и) $x^2(x - 7)^3(1 - x) < 0$.

276 Решите неравенства:

а) $\dfrac{(x + 4)(x - 8)}{x(x - 1)} > 0$; б) $\dfrac{(x - 7)^2(2 - x)}{(x + 1)^5} \geqslant 0$; в) $\dfrac{4}{x^2 - 4x} > \dfrac{x}{x - 4}$.

277 Найдите значения x, при которых выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{4 - x - 3x^2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{3 + 5x + 2x^2}}$; в) $\sqrt{\dfrac{-3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 5x + 4}}$.

278 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 < 0 \\ 5x + 2 > 2x + 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{16x^2 - 9}{x + 2} \geqslant 0 \\ 4x^2 + 7x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{7x^2}{14 + 2x} \leqslant 0 \\ 10x + x^2 \leqslant 0 \end{cases}$.

279 Постройте график функции:

а) $y = -(x - 2)^2 + 4$; б) $y = x^2 - 2x - 3$.

280 Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x - 2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 4, \\ -\dfrac{3}{x}, \text{ если } -3 \leqslant x < -1 \end{cases}$

281 Решите уравнения:

а) $\dfrac{x+4}{x-3} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x-3}$; в) $5\left(x - \dfrac{6}{x}\right)^2 + 3 \cdot \left(x - \dfrac{6}{x}\right) - 2 = 0$;

б) $\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{4}{x^2-4}$; г) $x^2 + 3x = \dfrac{8}{x^2 + 3x - 2}$.

282 Упростите выражение:

$\left(\dfrac{a}{a^2 - 16} - \dfrac{a+1}{a^2 + 2a - 8}\right) : \dfrac{a}{a^2 - 6a + 8}$.

283 Докажите тождество:

$\left(\dfrac{2b}{2b + c} - \dfrac{4b^2}{4b^2 + 4bc + c^2}\right) : \left(\dfrac{2b}{4b^2 - c^2} + \dfrac{1}{c - 2b}\right) \cdot \dfrac{c + 2b}{2bc - 4b^2} = 1$.

284 Из города в поселок, находящийся на расстоянии 27 км от города, отправился пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 36 минут после этого навстречу ему из поселка в город вышел другой пешеход со скоростью 3 км/ч. Найдите расстояние от поселка до места их встречи.

285 Расстояние между двумя пристанями равно 70 км. В 7 часов утра теплоход отчалил от пристани вниз по течению реки. После четырехчасовой стоянки у второй пристани теплоход отправился в обратный рейс и прибыл к первой пристани в 23 ч. в тот же день. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость воды в реке 2 км/ч.

286 Автомобиль был задержан в пути на 0,2 ч, а затем на расстоянии в 60 км наверстал это время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите начальную скорость автомобиля.

287 Докажите неравенство:

а) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$, если $a + b \geqslant 0$;

б) $\dfrac{25x}{2y} + \dfrac{2y}{x} \geqslant 10$, если x и y имеют одинаковые знаки.

288 Найдите значение выражения $\dfrac{t^2 + tp - p^2}{t^2 - tp + p^2}$ при $\dfrac{t}{p} = 4$.

289 Докажите тождество:

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

б) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

290 Докажите, что при любом натуральном n

а) число $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится нацело на 9;

б) число $4^n + 15n - 1$ делится нацело на 9.

291 Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с 9.

Глава 2

Развитие понятия функции

§ 1. Свойства функции

1. Множества точек на плоскости. Графики уравнений и неравенств

О мир, пойми! Певцом – во сне – открыты
Закон звезды и формула цветка.

Марина Ивановна Цветаева (1892–1941),
русская поэтесса

В восьмом классе мы познакомились с *линейными* уравнениями и неравенствами с двумя неизвестными и их системами. Все решения этих уравнений и неравенств, как мы знаем, можно изобразить точками на координатной плоскости. В этом пункте мы расширим свои знания о геометрической интерпретации уравнений и неравенств, познакомившись с примерами графиков нелинейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными.

Как мы знаем, линейное уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений, которое задает прямую на координатной плоскости. Например, уравнение $y = x$ задает прямую линию, объединяющую биссектрисы I и III координатных углов (рис.1).

В общем случае уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечное множество пар решений $(x; y)$, которые, как точки координатной плоскости, заполняют некоторую линию на плоскости. Например, уравнение $y = x^2$ задает параболу (рис. 2). Из курса геометрии нам известно, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 3) и т.д.

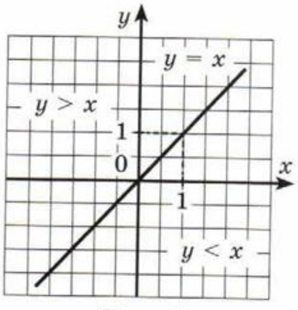


Рис. 1

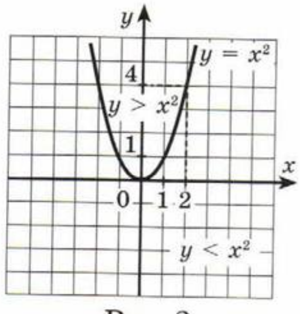


Рис. 2

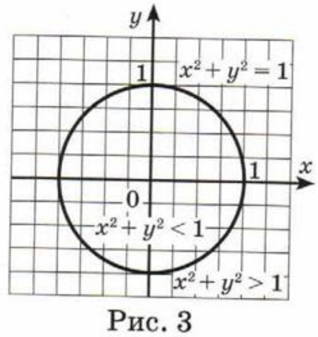


Рис. 3

Отметим, что уравнение с двумя неизвестными может задавать и конечное множество точек на плоскости. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает единственную точку – начало координат. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = -1$ пусто.

Пример 1.

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

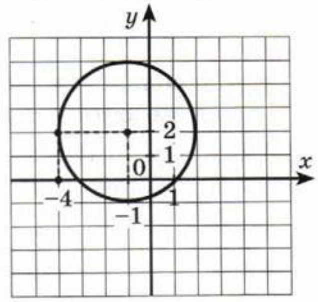


Рис. 4

Из курса геометрии нам известно, что уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ задает окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$. Значит, уравнению $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$ соответствуют те и только те точки плоскости, которые принадлежат окружности с центром в точке $(2; -1)$ и радиусом 3 (рис.4).

Уравнение с двумя неизвестными в самом общем виде можно записать так: $P(x, y)=0$. Можем ввести понятие графика для таких уравнений.

Определение 1. Множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют уравнению $P(x, y)=0$, называется **графиком уравнения** $P(x, y)=0$.

Пример 2.

Изобразить графики уравнений:

а) $|y|=|x|$; б) $|y|=x^2$; в) $x^2+y^2=x$; г)* $x+|x|=y+|y|$.

Решение.

а) Так как модули чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$|y|=|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right..$$

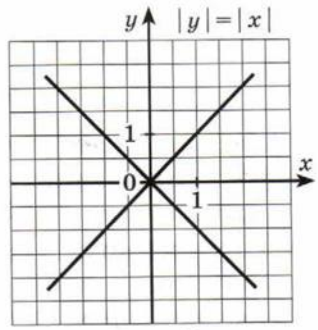


Рис. 5

Искомое множество является объединением двух прямых $y=x$ и $y=-x$ (рис. 5).

По другому данное уравнение можно решить так: равенство модулей чисел эквивалентно равенству их квадратов, поэтому $y^2=x^2$, откуда $(y-x)(y+x)=0$.

б) Так как $x^2 \geqslant 0$, то, раскрывая модуль по определению, получим

$$|y|=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=-x^2 \end{array}\right..$$

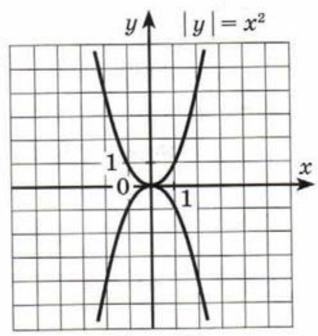


Рис. 6

Искомое множество является объединением двух парабол $y=x^2$ и $y=-x^2$ (рис. 6).

в) Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене x^2-x приведем исходное уравнение к виду уравнения окружности:

$$x^2-x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $(\frac{1}{2}; 0)$ и радиусом $\frac{1}{2}$, изображенную на рисунке 7.

* * *

г) Раскроем модуль, рассмотрев все возможные комбинации знаков выражений, стоящих под модулем.

1) Если, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то уравнение $x+|x|=y+|y|$ примет вид $2x=2y \Leftrightarrow x=y$. Графиком данного уравнения является часть прямой $y=x$. Для рассматриваемого нами случая ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) выберем часть этой прямой, заключенную в I четверти. Построим биссектрису I координатного угла.

2) Аналогично, если $x < 0$, $y \geqslant 0$, то уравнение примет вид $y = 0$, т.е. в II четверти получим отрицательный луч оси x.

3) Если $x < 0$, $y < 0$, то уравнение примет вид $0 = 0$, т.е. все точки III четверти удовлетворяют уравнению.

4) Наконец, если $x \geqslant 0$, $y < 0$, то уравнение $x + |x| = y + |y|$ примет вид $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Строим в IV четверти соответствующий отрицательный луч оси y.

Искомым графиком является третий координатный угол, включая отрицательные части осей, и биссектриса I координатного угла (рис. 8).

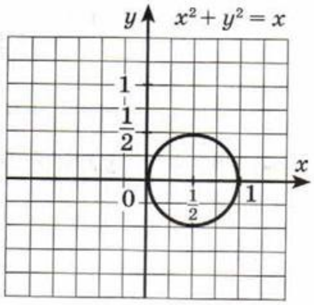


Рис. 7

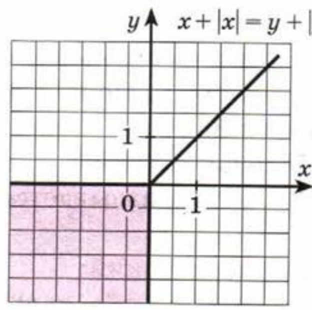


Рис. 8

Как мы знаем, линейное неравенство с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений, которое задает полуплоскость. Например, неравенство $y > x$ задает полуплоскость, лежащую выше прямой $y = x$, а неравенство $y \leqslant x$ – полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = x$, включая и саму прямую.

В общем случае одно неравенство с двумя неизвестными имеет бесконечное множество пар решений (x, y), которые, как правило, являются некоторой фигурой на плоскости (с границей или без границы). Например, неравенство $x^2 + y^2 < 1$ задает внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат, неравенство $x^2 + y^2 \leqslant 1$ – множество точек этого круга вместе с границей, и т.д. Неравенство с двумя неизвестными может задавать и конечные множества точек на плоскости. Например, множество решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant 0$ состоит из единственной точки – начала координат. Множество решений неравенства $x^2 + y^2 < 0$ пусто.

Мы можем уточнить алгоритм, известный нам из 8 класса.

Алгоритм графического решения неравенства с двумя неизвестными

1. Преобразовать неравенство так, чтобы при замене его знака на знак равенства получалось уравнение (уравнения), задающее известное множество точек плоскости (параболу, окружность и пр.).
2. Заменить знак неравенства знаком равенства и построить график полученного уравнения.
3. Выделить искомую часть плоскости в соответствии со знаком данного неравенства.

Пример 3.

Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: а) $(x + y)(x - y + 1) > 0$; б) $x^2 + y^2 \leqslant x - y$; в) $y \geqslant x + |x|$.

Решение.

а) Произведение равно нулю, когда хотя бы один из его множителей равен нулю, значит, $(x + y)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right.$

Искомое множество точек – пара вертикальных углов, образованных прямыми $x + y = 0$ и $y = x + 1$, за исключением самих прямых.

Для выбора одной из двух образовавшихся пар вертикальных углов нужно взять пробную точку, не лежащую ни на одной из этих двух прямых, например, точку $(1; 0)$. Так как $(1 + 0)(1 - 0 + 1) > 0$, то искомая пара углов та, которая содержит точку $(1; 0)$. Прямые $x + y = 0$ и $y = x + 1$ не принадлежат искомому множеству (рис. 9).

б) Преобразуем неравенство к виду $x^2 - x + y^2 + y \leqslant 0$, то есть $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$. Точка с координатами $(x; y)$ принадлежит искомому множеству тогда и только тогда, когда расстояние от нее до точки с координатами $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ не превосходит $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Данное неравенство задает круг радиуса $\sqrt{\frac{1}{2}}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ вместе с точками границы (рис.10).

в) Раскроем модуль. При $x \geqslant 0$ получим $y \geqslant 2x$; при $x < 0$ получим $y \geqslant 0$. Искомое множество – внутренность тупого угла вместе с точками границы (рис. 11).

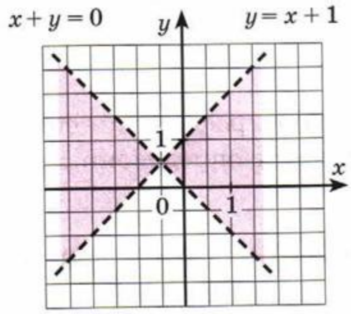


Рис. 9

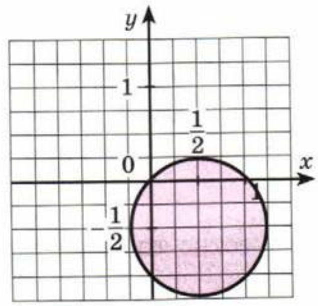


Рис. 10

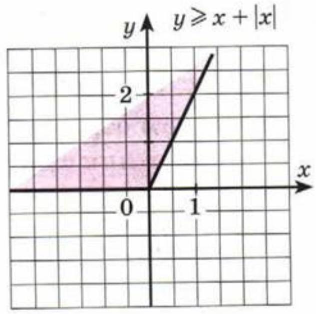


Рис. 11

Множества решений различных систем уравнений и неравенств и их графические изображения рассматривались в курсе 8 класса. Графическое решение таких систем в общем случае находится аналогично, то есть путем нахождения пересечения множеств решений, полученных для каждого из соотношений системы.

* * *

Пример 4*.

Построить график уравнения $\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства:

$$\begin{cases} y^2 = x^2 \\ y^2 < 1 \end{cases}$$

Квадраты чисел равны в том и только в том случае, если эти числа равны или противоположны.

$$y^2 = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right.$$

Искомому множеству принадлежат только те точки из пары прямых $y = \pm x$, ординаты которых удовлетворяют условию $|y| < 1$ (рис. 12). Четыре концевых точки этого «креста» не принадлежат искомому множеству.

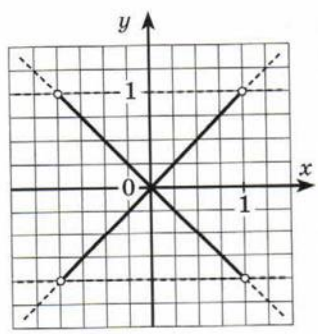


Рис. 12

К **292** Постройте графики функций:

а) $y = -x + 4$; б) $y = x - 5$.

Как они называются?

293 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x + y = 4$; б) $x - y - 5 = 0$; в) $2x + 0y = 3$; г) $0x + 3y = -6$.

294 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 4x - 1 + |x|$.

295 Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Для этого воспользуйтесь знаниями из курса геометрии о том, что уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает на плоскости окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$.

296 а) Обобщите имеющиеся у вас знания о построении графиков уравнений, опираясь на предыдущие задания.

б) Постройте график уравнения $x^2 + y = 0$.

в) Каким образом вы можете расширить известное вам понятие графика линейного уравнения с двумя неизвестными? Сопоставьте свой вариант с определением на стр. 76.

297 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$;

в) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$; г) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -16$.

298 Изобразите графики уравнений:

а) $|y| = x$; б) $y^4 = x^2$; в) $x^2 + y^2 = 2x - 2y$.

299 Изобразите график уравнения $x - |x| = y - |y|$.

300 Изобразите на координатной плоскости множества решений неравенств:

а) $4x - 2y + 6 > 0$; б) $-2x + y - 2 \geqslant 0$; в) $2x + 3 > 0$.

301 Предположите, где на координатной плоскости будет располагаться множество решений неравенства $x^2 + y^2 < 1$. Проверьте свое предположение по учебнику. Каким образом вы можете расширить известный вам алгоритм графического решения линейного неравенства с двумя неизвестными?

302 Изобразите на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $(x + y)(x - y) < 0$; б) $(x + y + 1)(x - y - 2) \geqslant 0$.

303 Изобразите на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $x^2 + y^2 > 1$; б) $x^2 + y^2 > 2x - 2y$; в*) $(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 \leqslant 4$.

304 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y < |x|$.

П **305** Являются ли данные множества эквивалентными друг другу:

а) $A = \{0,2; 3,6; 8,75; 1,125\}$ и $B = \{\frac{1}{5}; 3\frac{3}{5}; 8\frac{3}{4}; 1\frac{1}{8}\}$;

б) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$ и $B = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; ...\}$;

в) множество целых чисел и множество целых чисел, кратных девяти?

306 Проиллюстрируйте штриховкой на числовой прямой:

а) $(3; 8] \setminus (-1; 5)$; б) $\overline{A}$, если $A = (-6; 6]$.

307 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{3}{7x^2 - 2x}$; б) $\dfrac{n^2 - 25}{n^2 - 6n + 8}$.

308 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{a}{|a| - 4}$; б) $\dfrac{m - 5}{4 - |3m - 5|}$.

309 Определите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = x^2 - 4x - 1$; б) $y = -2x^2 + 5x + 3$; в) $y = -64x^2 + 16x - 1$.

310 Вычислите координаты точки пересечения прямых:

а) $x + y + 1 = 0$ и $5x - 3y = 2$; б) $5x + 3y = -11$ и $7x + 2y = 0$.

311 Какая из предложенных систем уравнений не имеет решений?

1) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 7x - y = -11 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 5x = 2(2 - y) \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 4 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x - y = 8 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$.

312 Найдите $7x_0 - 6y_0$, если $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 5 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = -5 \end{cases}$.

Д **313** Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$;

в) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$; г) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = -25$.

314 Изобразите графики уравнений:

а) $|y| = -x$; б) $y^3 = x^6$; в) $4x^2 + 4y^2 = 4x - 4y + 7$.

315 Изобразите график уравнения $x^2 - x|x| = y^2 - y|y|$.

316 Изобразите на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $(3x + 4y - 7)(4x - 3y - 1) \leqslant 0$; б) $x^2 + y^2 > 6x - 8y$.

317 Найдите область определения алгебраической дроби:

а) $\dfrac{1}{x^2 - 9}$; б) $\dfrac{b - 7}{|b| - 7}$; в) $\dfrac{6 + 3d}{1 + |d|}$; г) $\dfrac{9 - t^2}{t^2 + 8n + 15}$.

318 Определите наименьшее и наибольшее значение функции:

а) $y = x^2 + 3x + 9$; б) $y = -x^2 - 3x + 3$; в) $y = 36x^2 + 60x + 25$.

319 Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 10y - x = -21 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = -8 \\ -x + \frac{1}{3}y = 5 \end{cases}$.

320 Найдите $5(y_0 - x_0)$, если $(x_0; y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} 4(x + 3y) + 2(x - y) = 28 \\ 2(y - x) + x + 3y = 2 \end{cases}$

C **321*** Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|2x + y| + |2x - y| \leqslant 10$, и найдите площадь получившейся фигуры.

2. Общее понятие функции. Область определения и множество значений функции

Знать, чтобы предвидеть.

Огюст Конт (1798–1857),
французский философ

Мы работаем с понятием функции, начиная с шестого класса. Подведем некоторые итоги нашей многолетней работы, систематизируя имеющиеся у нас знания.

Сначала уточним известное нам определение функции. На протяжении изучения понятия функции мы делали это не раз – чем большим становится запас наших знаний, тем более точное определение мы можем рассмотреть.

Определение 1. Соответствие f между множествами X и Y называется **функцией**, если каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$. Множество X называется **областью определения** функции (обозначается $D(f)$). Множество элементов $y \in Y$, каждый из которых соответствует хотя бы одному $x \in X$, называется **множеством значений** функции (обозначается $E(f)$).

Причем, как мы говорили в первой главе, множества X и Y не обязательно числовые.

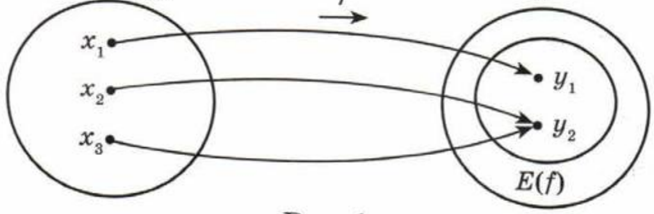


Рис. 1

На рисунке 1 изображена уже знакомая нам диаграмма Эйлера–Венна, иллюстрирующая определение функции. Отметим, что $E(f) \subset Y$ и не обязано совпадать с Y (в предыдущей, более простой, версии определения мы этих тонкостей не рассматривали для его упрощения).

Тот факт, что элементу x соответствует элемент y, мы записываем с помощью равенства: $y = f(x)$. На рисунке $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) = f(x_3)$.

Применяя известные нам кванторы $\forall$ («для любого») и $\exists$ («существует»), определение функции можно записать гораздо компактнее:

$y = f(x)$ – функция с областью определения X и множеством значений из Y,

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, x \in X \to \exists!\, y \in Y\colon y = f(x)$$

Отметим, что в этой записи символ $\exists!$ означает «существует единственный».

Множество значений функции в этой символике можно задать так:

$$E(f) = \{y \in Y\colon \exists\, x \in X,\ y = f(x)\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только *числовые* функции, то есть такие, что $X \subset \boldsymbol{R}$, $Y \subset \boldsymbol{R}$.

Определение 2. **Графиком числовой функции** $y = f(x)$ называется график соответствующего уравнения $y = f(x)$.

Следует понимать, что график уравнения и график функции это не одно и то же. Из графиков уравнений, изображенных нами в предыдущем пункте, графиками функций являются только $y = x$ и $y = x^2$; во всех остальных случаях возникшее соответствие между множествами $X \subset \boldsymbol{R}$ и $Y \subset \boldsymbol{R}$ не является функцией, так как значениям $x \in X$ может соответствовать более одного значения $y \in Y$.

* * *

Отметим, что не для каждой функции можно начертить график. Рассмотрим, например, так называемую функцию Дирихле:

$$y = \begin{cases} 1, & x \in \boldsymbol{Q} \\ 0, & x \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q} \end{cases}$$

Эта функция всем рациональным числам ставит в соответствие единицу, а всем иррациональным нуль. График для функции Дирихле существует (как и для всякой числовой функции), его можно представить – это две «очень дырявые» параллельные прямые $y = 1$ и $y = 0$ (на первой прямой графика выколоты все точки с иррациональными абсциссами, а на второй – все точки с рациональными абсциссами). Но начертить его невозможно.

Теперь, уточнив свои представления об области определения и области значений функций, вспомним, как находить их для заданной функции. Рассмотрим пример нахождения области определения функции, исходя из ее формулы.

Если функция задана формулой, то (если явно не оговорено иное) считается, что область определения совпадает с областью допустимых значений переменной.

Пример 1.

Указать область определения функции: а) $y = |x|$; б) $y = \dfrac{2}{x}$; в) $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

Чтобы найти область определения функции, укажем значения, которые может принимать аргумент.

а) Аргумент x может принимать любые значения, значит, $D(y) = (-\infty; +\infty)$, иначе эта запись может выглядеть так: $D(y) = \boldsymbol{R}$.

б) Знаменатель дроби не может быть равен нулю, поэтому $x \neq 0$.
Тогда $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ или $D(y) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

в) Определение арифметического квадратного корня ограничивает область определения этой функции: подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, значит, нам нужно решить неравенство:

$$1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

Значит, $D(y) = [-1; 1]$.

Ответ: а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$; б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $D(y) = [-1; 1]$.

Рассмотрим пример нахождения области определения функции, заданной графиком.

Пример 2.

На рисунке 2 изображена парабола с двумя выколотыми точками. Указать область определения этой функции по ее графику.

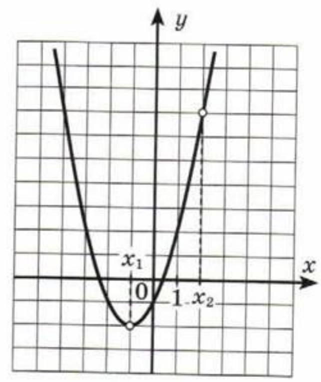


Рис. 2

Решение.

Найдем значения x, при которых функция не определена, для этого определим по графику абсциссы выколотых точек. Абсцисса нижней точки равна -1, абсцисса верхней точки равна 2.

Значит, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Рассмотрим пример нахождения множества значений функции.

Пример 3.

Найти множество значений функции $y = 2|x| - |x - 1|$.

Решение.

Область допустимых значений переменной x, а значит и область определения данной функции – вся числовая ось. Множество значений функции легче определяется не с помощью формулы, а исходя из ее графика.

Разобьем числовую ось на промежутки, где знаки выражений под знаком модуля определены однозначно: $(-\infty; 0) \cup [0; 1) \cup [1; +\infty)$. Раскроем знак модуля, исходя из знака выражения на каждом из полученных промежутков.

При $x \geqslant 1$ имеем: $y = 2x - (x - 1) = x + 1$;
при $0 \leqslant x < 1$ имеем: $y = 2x + (x - 1) = 3x - 1$;
при $x < 0$ имеем: $y = -2x + (x - 1) = -x - 1$.

Построим график полученной кусочно-линейной функции.

$$y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \geqslant 1 \\ 3x - 1, \text{ если } 0 \leqslant x < 1 \\ -x - 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

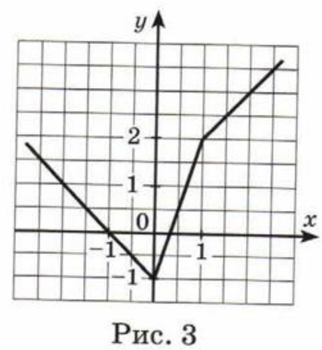


Рис. 3

График ее состоит из трех «кусков» прямых линий – двух лучей и одного отрезка (рисунок 3). В точке $x = 1$ функция принимает значение $y = 2$, в точке $x = 0$ функция принимает значение $y = -1$. Из графика видно, что множеством значений функций является луч $[-1; +\infty)$.

Ответ: $E(y) = [-1; +\infty)$.

К **322** Постройте графики уравнений:

а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 + 2$; в) $y^2 = -x^2 + 25$; г) $|y| = x + 2$.

Какие из этих графиков являются графиками функций? Что такое график функции? Попробуйте дать определение этому понятию. Уточните свои знания о функции и ее графике с помощью учебника.

323 Найдите область определения функции: $y = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2 + 4x + 1}}$.

324 Найдите область определения функции: $y = \sqrt{11 - 2|x|} + \dfrac{4}{\sqrt{15 - 2x - x^2}}$.

325 Укажите область определения функции и постройте график:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; б) $y = \dfrac{x^2 - x - 20}{x - 5}$; в) $y = 2 \cdot \dfrac{5x^2 - 2x}{5x^3 - 2x^2}$; г) $y = -\dfrac{2x^2 - x^3}{x - 2}$.

326 Укажите целые значения переменных, входящих в область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{\dfrac{1}{x - 2}}$.

327 Найдите множество значений функции $y = |x + 1| + |x - 1|$.

П **328** Какие из данных множеств конечные, а какие бесконечные?

а) множество учеников вашей школы;
б) множество целых чисел, являющихся решениями неравенства $|x| < 1000$;
в) множество целых чисел, являющихся решениями неравенства $|x| > 1000$.

329 Линейная функция $y = -\dfrac{2}{7}x + 7$ задана на области определения $[-7; 7]$. Между какими множествами она задает соответствие?

330 Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, для каждой из которых выполняется равенство:

а) $\dfrac{y - x^2 + 4}{x - 1} = 0$; б) $\dfrac{x^2 + y^2 - 25}{x - 4} = 0$.

331 Постройте график уравнения $y = 2x|x| + x^2 - 6x$.

332 Решите двойное неравенство: $-6 < 6 - \dfrac{1}{6}x \leqslant -1$.

333 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x + 9 \leqslant 9x + 4 \\ 1{,}7x < 51 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{2x + 5}{5} > \dfrac{5x + 2}{2} \\ \dfrac{x + 2}{5} < \dfrac{x + 5}{2} \end{cases}$; в) $\begin{cases} (4 - 3x)(\sqrt{3} - 2) > 0 \\ 0{,}4x < 4 \end{cases}$.

Д **334** Найдите область определения функции: $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{2 + 3x - 5x^2}}$.

335 Найдите область определения функции: $y = \sqrt{12 + x - x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{2|x| - 5}}$.

336 Укажите область определения функции и постройте график:

а) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$; б) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$; в) $y = -\dfrac{2x - 1}{2x^2 - x}$; г) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 2}$.

337 Найдите множество значений функции $y = 2|x| - x + 2$.

338 Изобразите множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, для каждой из которых выполняется равенство:

а) $\dfrac{y + x^2 - 1}{x + 2} = 0$; б) $\dfrac{16 - x^2 - y^2}{x + 3} = 0$.

С **339*** Найдите множество значений функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5}$.

340* На доске написаны ненулевые числа a, b, c, а также числа $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло быть записано на доске?

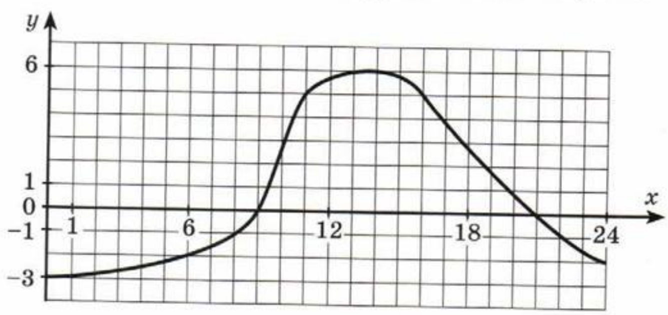
3. Основные свойства функции

Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Норберт Винер (1894–1964),
американский математик и философ,
основоположник кибернетики и
теории искусственного интеллекта

Знакомясь с той или иной функцией, мы выясняли, какими свойствами обладает каждая из них. В этом пункте мы систематизируем имеющиеся у нас знания о свойствах функций.

Рассмотрим график изменения температуры в течение суток.



По оси x отложены значения времени (в часах), а по оси y – значения температуры (в градусах по Цельсию). Эта функция ставит в соответствие каждому значению времени из промежутка $[0; 24)$ значение температуры из промежутка $[-3; 6]$.

График пересекает ось абсцисс в двух точках – температура дважды была равна нулю, это происходило в 9 часов и в 21 час. С 0 до 9 часов температура была отрицательной. После 9 и до 21 часа температура была выше нуля. После 21 часа и до 24 часов температура опять стала отрицательной. С 0 до 14 часов температура повышалась – со временем ее значения увеличивались, а с 14 часов до 24 часов она понижалась – со временем ее значения уменьшались. Самой низкой температура была в 0 часов и составила $-3°$. Максимальное значение температуры равно $6°$, оно было достигнуто в 14 часов.

Чтобы узнать информацию об изменении температуры мы **прочитали график**. Какие свойства функции мы при этом использовали? Мы определили область определения и область значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания функции, а также наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Об **области определения** и **области значений функции** мы уже подробно говорили в предыдущем пункте. Остановимся на остальных свойствах функции, обобщая имеющиеся у нас знания.

2. Значения аргумента, при которых функция равна нулю, принято называть **нулями функции**.

Чтобы найти нули функции $y = f(x)$ нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Чтобы установить нули функции по графику нужно найти точку (или точки) пересечения графика с осью абсцисс и указать ее (их) абсциссу.

Так, функция $y = x^3$, график которой изображен на рисунке 1, равна нулю при $x = 0$. При $x < 0$ график $y = x^3$ располагается ниже оси абсцисс, значит, на промежутке $(-\infty; 0)$ *значения функции отрицательны*. При $x > 0$ график $y = x^3$ располагается выше оси x, значит, на промежутке $(0; +\infty)$ *значения функции положительны*.

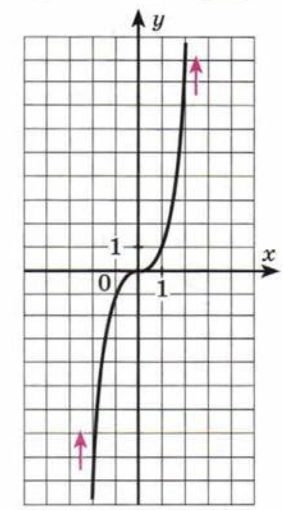


Рис. 1

3. Промежутки, где функция сохраняет свой знак: «+» (положительна) или «–» (отрицательна) называют **промежутками (интервалами) знакопостоянства**.

Так, функция $y = x^2$ (и вообще, $y = x^{2n}$ при $n = 1, 2,\ldots$) положительна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

А функции $y = x$, $y = x^3$ (и вообще, $y = x^{2n+1}$ при $n = 0, 1, 2,\ldots$) отрицательна при $x \in (-\infty; 0)$, положительна при $x \in (0; +\infty)$.

4. Еще одним важным свойством функции, которое мы будем исследовать, является ее возрастание или убывание.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на множестве $X \subset R$, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Функция $f(x)$ называется **убывающей** на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, если для любых точек x_1, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Все такие функции называются **монотонными** на множестве X.

Как правило, в качестве множества X рассматривается некоторый промежуток. Например, функции $y = x$, $y = x^3$ (и вообще, $y = x^{2n+1}$ при $n = 0, 1, 2,\ldots$) возрастают на всей числовой прямой, то есть при $x \in (-\infty; +\infty)$ – на рисунке 1 возрастание кубической параболы показано стрелками. А функции $y = x^2$, $y = x^4$ (и вообще, $y = x^{2n}$ при $n = 1, 2,\ldots$) убывают на луче $(-\infty; 0]$ и возрастают на луче $[0; +\infty)$ – см. рисунок 2.

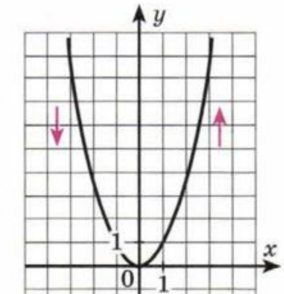


Рис. 2

Заметим, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ убывает на каждом из двух открытых лучей $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, входящих в область определения, но не является убывающей на всей области определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как, например, $1 > -1$, а $f(1) > f(-1)$. Функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$ и убывает на открытом луче $(0; +\infty)$ – см. рисунок 4. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на всей области определения $[0; +\infty)$ – см. рисунок 5.

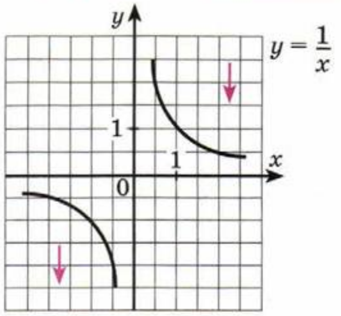


Рис. 3

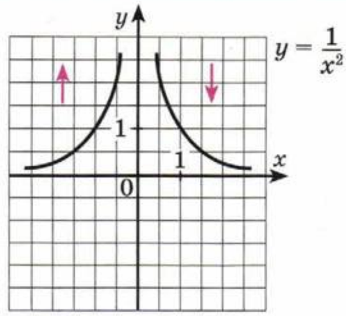


Рис. 4

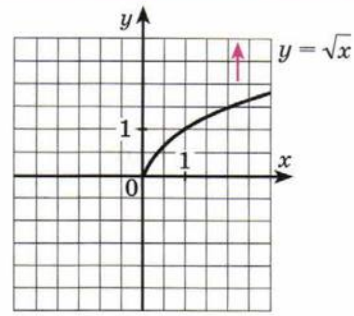


Рис. 5

В простых случаях возрастание и убывание функции устанавливается доказательством неравенств. Например, возрастание функции $y = \sqrt{x}$ следует из того, что при $x_1 > x_2$ по свойству корня $\sqrt{x_1} > \sqrt{x_2}$. В более сложных случаях для нахождения промежутков возрастания (убывания) применяются другие, пока недоступные нам методы.

Отметим, что не для всех функций можно выделить промежутки возрастания или убывания. Так, например, функция $y = 1$ постоянна, и промежутков возрастания или убывания у нее нет.

5. Помимо вышеуказанных свойств, для некоторых функций можно определить их **наибольшее** или **наименьшее значение**

Определив ординату верхней точки графика, мы получим наибольшее значение функции, определив ординату нижней точки графика – наименьшее. Так, наименьшее значение функции $y = x^2$ равно 0, а наибольшего значения функции указать нельзя.

Итак, теперь мы может привести план, которого нужно придерживаться при исследовании функции.

План исследования функции

1) Указать область определения функции: $D(y)$.
2) Указать область значений функции: $E(y)$.
3) Указать, на каких промежутках из области определения функция равна 0, положительна, отрицательна.
4) Указать, на каких промежутках из области определения функция возрастает (убывает, постоянна).

Наибольшее и наименьшее значение функции мы учитываем при нахождении области значений функции, поэтому в плане соответствующий пункт, как отдельный, мы не выделили.

Следует отметить, что для некоторых сложных функций не все пункты этого плана могут быть реализованы изученными нами методами.

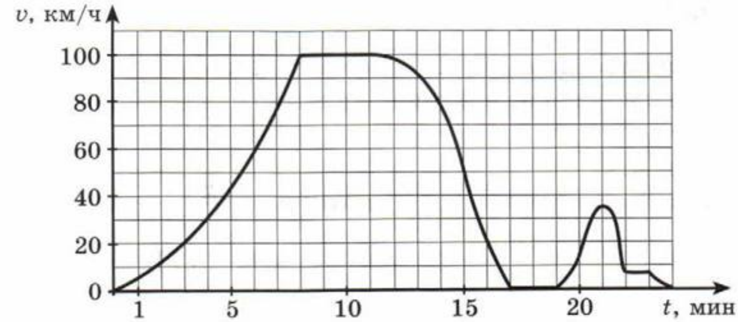
К **341** Постройте график функции $f(x) = (x - 2)^2 - 3$. Выполните по графику следующие задания.

а) Выделите точки пересечения параболы с осью Оx. Обведите ту часть графика, где $f(x)$ положительна, ручкой, а где $f(x)$ отрицательна – простым карандашом.
б) Обведите ту часть графика, где $f(x)$ возрастает, и отметьте ее стрелкой $\uparrow$. Обведите ту часть графика, где $f(x)$ убывает, и отметьте ее стрелкой $\downarrow$.
в) Начертите пунктирной линией ось симметрии этой параболы.

г) Отметьте самую нижнюю точку графика. Какое наименьшее значение принимает функция?

Расскажите по графику о свойствах функции $f(x) = (x - 2)^2 - 3$.

342 На рисунке изображен график изменения скорости автомобиля на протяжении его движения из пункта A в пункт B.



Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:

а) Когда скорость автомобиля была равна нулю?

б) Сколько времени добирался автомобилист из пункта A в пункт B?

в) С какой максимальной скоростью двигался автомобиль?

г) В какие промежутки времени автомобиль двигался, а когда стоял?

д) В какие промежутки времени скорость автомобиля увеличивалась, уменьшалась, была постоянной?

Какие свойства функции вы использовали, чтобы ответить на эти вопросы?

343 Обобщите имеющиеся у вас знания о свойствах функции, опираясь на предыдущие задания. Сопоставьте результаты своей работы с текстом на стр. 85 – 86.

344 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции положительны:

а) $y = 2x + 15 - x^2$; б) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; в) $y = \dfrac{x^3(x - 2)^2}{x - 1}$; г) $y = x - 1 + 2|x|$.

345 Какие из следующих утверждений верны?

а) Сумма двух убывающих функций – убывающая функция.

б) Разность двух возрастающих функций – убывающая функция.

в) * Произведение двух возрастающая функций – возрастающая функция.

346 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции возрастают:

а) $y = 4x + 11 - x^2$; б) $y = 1 - \sqrt{x^2}$; в) $y = 2x + 1 + 3|x|$.

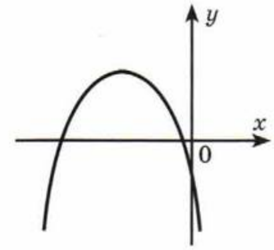
П **347** Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове:

а) «НОРМА»; б) «ДИСПЕРСИЯ» (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

348 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись? Сколько трехзначных чисел можно составить из этих же цифр, сколько двузначных?

349 Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, 9? Сколько двузначных чисел можно составить из этих же цифр? (Цифры в записи числа не повторяются. Число не может начинаться с нуля.)

350 Сколькими способами можно разбить 18 человек, участвующих в экскурсии по музею, на две группы по 9 человек в каждой?



351 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображенным на рисунке. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

352 Найдите область определения функции $y = \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2}{x}$. Постройте ее график, упростив выражение $\frac{(\sqrt{x^2 - x})^2}{x}$. Найдите значения m, при которых прямая $y = m$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

353 Постройте график функции $y = -\frac{4(x + 2)}{x^2 + 2x}$. При каких значениях a прямая $y = a$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки?

354 Решите систему уравнений, применяя графический метод: $\begin{cases} |x| = 6 - y \\ |x| - y = 4 \end{cases}$.

355 Найдите наименьшее целое положительное решение системы неравенств
$\begin{cases} 3x + 7 > -5 \\ 16 - 4x > 3 \end{cases}$.

Д **356** Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции отрицательны:

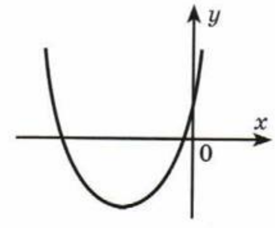
а) $y = 3x^2 + 2x - 5$; б) $y = -3 - \sqrt{x^2 - x}$; в) $y = \frac{(x - 3)(x - 1)^2}{(x + 2)^3}$; г) $y = 2|x - 1| - x - 2$.

357 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции убывают:

а) $y = 3x^2 + 5x - 13$; б) $y = \sqrt{(x - 3)^2} - 5$; в) $y = 3|x + 1| - 4x + 1$.

358 а) Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове «ПРИЗМА»; б) Сколько различных «слов» можно получить, выбирая любые четыре буквы из слова «ПРИЗМА»?

359 Сколькими способами можно выбрать из 15 спортсменов троих для участия в соревновании?



360 Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ задана графиком, изображенным на рисунке. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

361 Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{(x^2 - x)^2}}{x}$. Постройте ее график, упростив выражение $\frac{\sqrt{(x^2 - x)^2}}{x}$. Найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

362 Найдите наибольшее целое положительное решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 9x + 1 < 19 \\ 32 - 7x > -3 \end{cases}.$$

C **363*** При каких значениях параметра a функция $y = ax^2 + 2x + 5a$ будет положительной на всей области определения?

364* Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что

$$\left(x + \frac{1}{yzt}\right)\left(y + \frac{1}{xzt}\right)\left(z + \frac{1}{xyt}\right)\left(t + \frac{1}{xyz}\right) > 0.$$

Докажите, что $xyzt > 0$.

4*. Еще о свойствах функции

Человек должен верить, что непонятное можно понять: иначе он не стал бы размышлять о нем.

Иоганн Вольфганг фон Гете (1749–1832), немецкий поэт, мыслитель

В предыдущем пункте мы систематизировали свои знания об основных свойствах функции. Однако функции обладают и другими свойствами. Так, в курсе 8 класса мы познакомились с такими свойствами функций, как четность и нечетность. В этом пункте мы уточним свои представления об этих свойствах функции и познакомимся с новыми.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **четной**, если для всех $x \in R$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если для всех $x \in R$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Напомним, что функция $f(x)$ может не являться ни четной, ни нечетной.

Приведем примеры четных функций: 1) $y = 2x^2$, 2) $y = x^{2n}$ ($n = 1, 2, 3,...$), 3) $y = |x|$, 4) $y = 5$ (постоянная функция). Приведем примеры нечетных функций: 1) $y = x$, 2) $y = x^3$, 3) $y = x^{2n+1}$ ($n = 1, 2, 3,...$). Функции $y = x + 1$; $y = 3x^2 - 1$ являются примерами функций, не являющихся ни четными, ни нечетными. Функция $y = 0$ является примером функции, являющейся одновременно как четной, так и нечетной.

Как мы знаем, свойство четности или нечетности функции отражается на ее графике: график *четной* функции симметричен относительно *оси ординат*, график *нечетной* функции симметричен относительно *начала координат*.

Пример 1.

Какой функцией (четной, нечетной либо ни той, ни другой) является функция $f(x) = x^2 + x$?

Решение.

Если бы $f(x)$ была четной функцией, то для всех x выполнялось бы равенство $f(-x) = f(x)$, а для нечетной функции для всех x выполнялось бы равенство $f(-x) = -f(x)$.

Однако, например, при $x_0 = 1$: $f(x_0) = 2$, $f(-x_0) = 0$, то есть $f(-x_0) \neq f(x_0)$ и $f(-x_0) \neq -f(x_0)$. Функция не является ни четной, ни нечетной.

Ответ: $f(x) = x^2 + x$ не является ни четной, ни нечетной.

Отметим, что для доказательства того, что функция не является четной, достаточно найти хотя бы одну точку x_1, в которой $f(-x_1) \neq f(x_1)$, а для доказательства того, что функция не является нечетной – найти хотя бы одну точку x_2, в которой $f(-x_2) \neq -f(x_2)$. В то же время для установления, например, четности функции, необходимо доказывать равенство $f(-x) = f(x)$ для **всех** x.

Понятия четной и нечетной функции можно распространить на функции, определенные не при всех $x \in \boldsymbol{R}$, но для этого область определения функции должна быть симметричной относительно нуля.

Определение 2. Множество $X \subset \boldsymbol{R}$ называется **симметричным относительно нуля**, если для каждой точки $x \in X$ точка $(-x)$ также принадлежит X.

Так, множества $(-a;\ a)$; $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; $[-a;\ a]$; $[-a;\ 0) \cup (0;\ a]$; $[-2;\ -1] \cup [1;2]$; $(-3;\ -1) \cup \{0\} \cup (1;\ 3)$; $(-4;\ -3] \cup [-1;\ 1] \cup [3;\ 4)$ будут симметричными относительно нуля, а множества $[0;\ 1]$; $(-1;\ 2]$; $[-1;\ 1)$; $[-2;\ -1] \cup [1;\ 2)$ – симметричными относительно нуля не будут.

Определение 3. Функция $f(x)$, определенная на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется **четной**, если множество X симметрично относительно нуля и для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$, определенная на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется **нечетной**, если множество X симметрично относительно нуля и для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Приведем примеры четных и нечетных функций.

Четные функции	Нечетные функции
1) $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;	1) $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;
2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.	2) $y = \dfrac{1}{x^3 - x}$, $D(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 2.

Исследовать на четность-нечетность функции:

а) $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$; б) $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$; в) $y = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}$.

Решение:

а) $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$– симметрична относительно нуля. Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} + \dfrac{1}{-x+1} = -\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right) = -f(x)$; функция нечетна.

б) $D(f) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$– симметрична относительно нуля. Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \dfrac{1}{-x-1} - \dfrac{1}{-x+1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = f(x)$; функция четна.

в) Для нахождения $D(f)$ нужно решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0 \\ x^2 - x \geqslant 0 \end{cases}$. Такие системы мы учились решать в 8 классе. Так как квадратный трехчлен $x^2 + x$ с положительным старшим коэффициентом имеет корни $x_1 = -1$; $x_2 = 0$, то множеством решений первого неравенства системы является $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. Аналогично, множеством решений второго неравенства системы является $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. В пересечении этих множеств получим: $D(f) = (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$. Это множество симметрично относительно нуля.

Имеем $\forall x \in D(f)$: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - x} + \sqrt{(-x)^2 + x} = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} = f(x)$; функция четна.

Теперь познакомимся с еще одним свойством функций. Многие функции, описывающие реальные процессы окружающего нас мира, являются периодическими. Например, предположим, что мы катаемся на колесе обозрения, которое вращается с постоянной скоростью, делая один оборот за время $T = 5$ минут. Рассмотрим функцию, задающую высоту кабинки в зависимости от времени катания на колесе. Тогда, если мы засечем какой-то момент времени, то через каждые 5 минут, начиная от него, мы будем находиться в том же положении, то есть на той же высоте. Иначе говоря, значения указанной функции совпадают, когда аргумент (время катания) увеличивается на 5 минут. Нарисуем график этой функции, считая, что колесо вращалось и будет вращаться бесконечно долго, а мы начали отсчет времени с момента посадки в кабинку. Получим график[1], изображенный на рисунке 1.

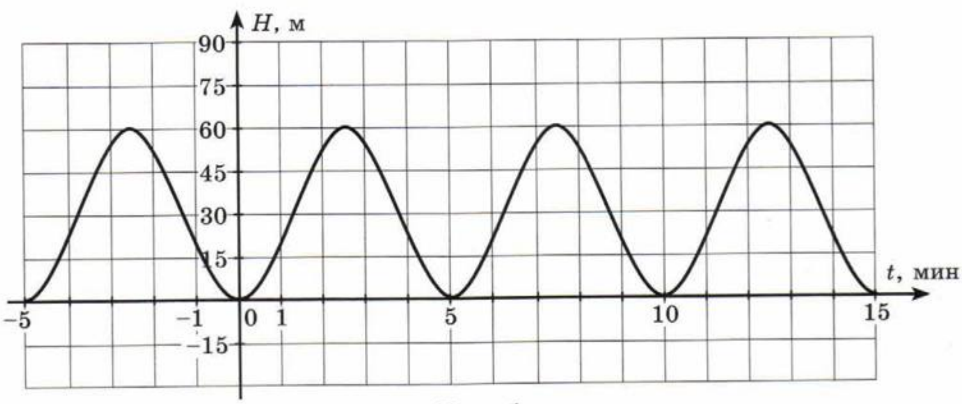


Рис. 1

Интересно, что график этой функции останется на листе (как множество точек), если все его точки сдвинуть на 5 единиц вдоль оси абсцисс, оставив оси координат на месте.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется **периодической**, если найдется положительное число T такое, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$; число T называется **периодом** функции.

Чтобы рассмотреть другие примеры периодических функций, введем следующие обозначения.

Целой частью числа x назовем наибольшее целое число, не превосходящее x, и обозначим $[x]$. *Дробной частью* числа x назовем результат вычитания из числа x его целой части и обозначим $\{x\}$, то есть $\{x\} = x - [x]$.

Например, $\left[5\frac{1}{3}\right] = 5$; $\left[-5\frac{1}{3}\right] = -6$; $[-2{,}14] = -3$; $\{2{,}14\} = 0{,}14$; $\{-2{,}14\} = 0{,}86$.

Если x – целое число, то $[x] = x$, и $\{x\} = 0$. Так, $[5] = 5$; $\{-2\} = 0$.

Рассмотрим функцию $y = \{x\}$ – дробная часть x.

Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$, и $\{x\} = x$; если $x \in [1; 2)$, то $[x] = 1$, и $\{x\} = x - 1$; если $x \in (2; 3)$, то $[x] = 2$, и $\{x\} = x - 2$, и т.д. Если $x \in [-1; 0)$, то $[x] = -1$, и $\{x\} = x + 1$; $x \in [-2; -1)$, то $[x] = -2$, и $\{x\} = x + 2$, и т.д.

[1] Полученный график называется синусоидой.

На рисунке 2 изображен график функции $y = \{x\}$.

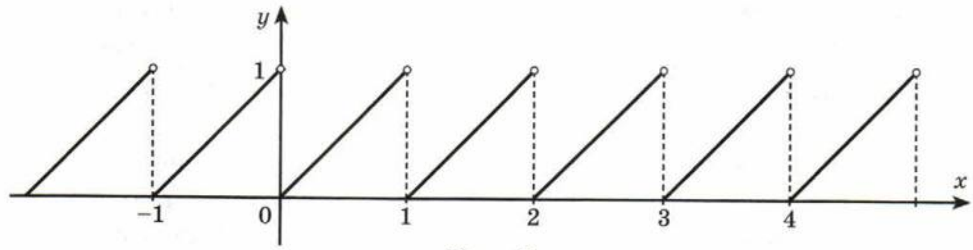


Рис. 2

При этом для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $[x + 1] = [x] + 1$, поэтому $\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = \{x\}$; функция $y = \{x\}$ имеет период $T = 1$.

Для функции $y = C$ (постоянная функция) периодом является любое положительное число.

Рассмотрим еще одно свойство функций.

Определение 5. Функция $f(x)$, определенная на множестве $X \subset \boldsymbol{R}$, называется **ограниченной**, если множество ее значений $E(f)$ ограничено, то есть содержится в некотором отрезке числовой прямой.

Рассмотрим примеры ограниченных функций.

1) $f(x) = \{x\}$; ее множество значений $E(f) = [0; 1) \subset [0; 1]$.

2) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

График этой функции – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = 1$ – изображен на рисунке 3. $D(f) = [-1; 1]$; $E(f) = [0; 1] \subset [0; 1]$.

3) Функция Дирихле. Ее множество значений состоит из двух чисел 1 и 0; $E(f) \subset [0; 1]$.

4) Функция $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Множество значений этой функции состоит из трех чисел $E(f) = \{-1; 0; 1\} \subset [-1; 1]$ – см. рисунок 4. Кстати, легко видеть, что эта функция является нечетной.

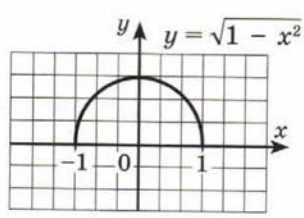


Рис. 3

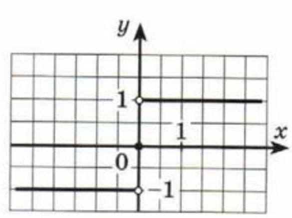


Рис. 4

Пример 3.

Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ограничена на всей числовой прямой.

Доказательство.

Так как при всех x имеет место неравенство $(x - 1)^2 \geqslant 0$, то $x^2 + 1 \geqslant 2x$, то есть $\dfrac{x}{x^2 + 1} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Поэтому при значениях $x \geqslant 0$ значения функции лежат на отрезке $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Заметим, что функция нечетная, поэтому ее значения при $x < 0$ противоположны соответствующим значениям при $-x > 0$, и поэтому лежат на отрезке $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$. Итак, $E(f) \subset \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, и функция ограничена.

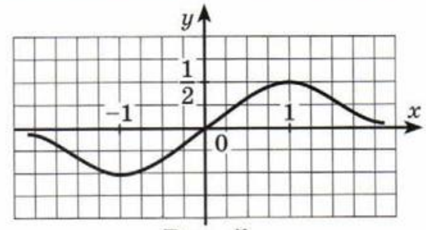
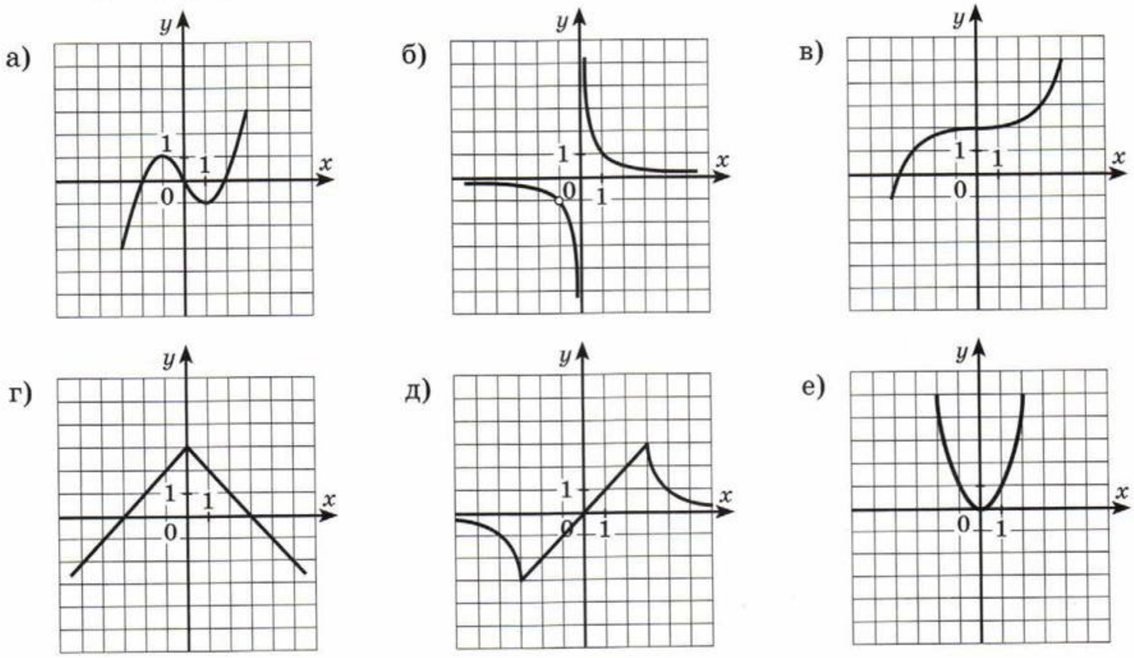


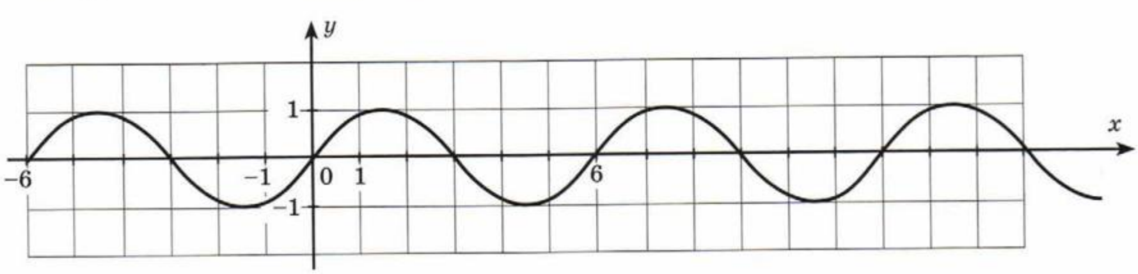
Рис. 5

График этой функции изображен на рисунке 5. Она возрастает на $[-1;\ 1]$, убывает $(-\infty;\ -1]$ и на $[1;\ +\infty)$.

К **365** Разбейте графики функций, изображенных на рисунках а – е, на три группы. По какому признаку вы это сделали? Сформулируйте определение соответствующего свойства функции. При затруднении обратитесь к тексту учебника.



366 1) Перечертите изображенный на этом рисунке график на кальку или прозрачную пленку, наложив ее на образец:



Передвиньте нарисованный вами график на 6 единиц вдоль оси абсцисс. Что вы наблюдаете? Познакомьтесь с еще одной подобной функцией на стр. 91.

2) Знаете ли вы, как называются функции, обладающие таким свойством? Обратитесь к тексту учебника и найдите соответствующее определение.

3) Познакомьтесь с еще одним свойством этой функции – ограниченностью, используя соответствующий текст учебника.

367 Верны ли следующие утверждения для функций, определенных на всей числовой оси?

а) Сумма двух четных функций является четной функцией.
б) Разность четной и нечетной ненулевых функций является нечетной функцией.
в) Произведение двух нечетных функций является четной функцией.
г) Произведение четной и нечетной функций является нечетной функцией.

368 Исследуйте на четность-нечетность следующие функции:

а) $y = \dfrac{1}{x+1} + 5x$; в) $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 5}$;

б) $y = 3x^4 - 2|x|$; г) $y = \dfrac{x^2}{|x| - 5}$.

369 Верны ли следующие утверждения?

а) Сумма двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
б) Разность двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
в) Произведение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.
г) Отношение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.

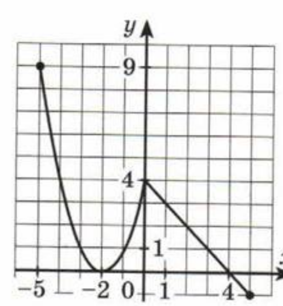
370 Какие из следующих функций являются ограниченными?

а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{1}{|x| + 1}$.

371 Дана функция $f(x) = \{5x + 0{,}5\}$. Докажите, что $f(x)$ – периодическая, и найдите ее период.

372 Постройте график функции $y = [x]$ и определите, будет ли она периодической.

373 По графику, изображенному на рисунке, найдите:



1) область определения функции;
2) область значений функции;
3) промежутки знакопостоянства;
4) промежутки убывания функции.

374 Постройте график уравнения:

а) $\dfrac{y - |x|}{x+1} = 0$; б) $|y| = x + 20$.

375 Решите уравнение: $|x - 4| = 6 + x$.

376 Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - 8 > 3 \\ 2x + 5 > 2 \\ 1 - x \geqslant -13 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} \geqslant x \\ x + \dfrac{x-1}{4} \geqslant 1 \\ 3x - 8 \leqslant 0 \end{cases}$.

377 Решите неравенство:

а) $|2x - 1| > 3$; б) $|5x - 1| \leqslant 5$.

378 Стрелок не целясь стреляет в мишень, площадь которой составляет 400 см^2 и попадает в нее. В центре этой мишени расположен маленький квадрат со стороной 5 см. Найдите вероятность того, что стрелок попал именно в этот квадрат.

379 В корзине лежало 40 груш, 3 из которых были испорчены. Повар для приготовления компота наугад взял 10 груш. Какова вероятность того, что у него качественные фрукты?

Д **380** Верны ли следующие утверждения для функций, определенных на всей числовой оси?

а) Разность двух нечетных функций является нечетной функцией.
б) Сумма четной и нечетной функций является четной функцией.
в) Произведение двух четных функций является четной функцией.

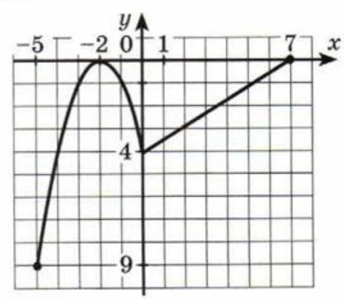
381 Исследуйте на четность-нечетность следующие функции:

а) $y = x^3 - 5x$; в) $y = x^2 \cdot \sqrt{|x| - 3}$;

б) $y = \sqrt{x + 5} - 3|x| + 2$; г) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 11}$.

382 Какие из следующих функций являются ограниченными?

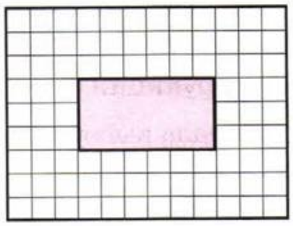
а) $y = |x| - x + 1$; б) $y = \sqrt{4 - x^2} + x^2$; в) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$.



383 По графику, изображенному на рисунке, найдите:

1) область определения функции;
2) область значений функции;
3) промежутки знакопостоянства;
4) промежутки возрастания функции.

384 Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 72 до 90 включительно делится на 3?



385 а) Центр брошенной наугад фишки попадает в фигуру, изображенную на рисунке. Какова вероятность того, что центр фишки не попадет в закрашенную часть?

б) Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $x^2 - 2x - 8 \leqslant 0$. Какова вероятность того, что оно окажется неотрицательным?

386 Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x < 0 \\ -7x + 16 < 2 \\ 2 - x \leqslant 10 \end{cases}.$$

387 Решите неравенство:

а) $|4x - 3| \geqslant 1$; б) $|7x + 2| < 5$.

С **388*** Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $x \geqslant \dfrac{1000}{x}$.

389* При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + a}}$ будет ограничена на всей области определения?

§ 2. Исследование функций и построение графиков

1*. Общий план построения графика функции

Никогда не бывает больших дел без больших трудностей.

Вольтер (1694–1778),
великий французский писатель,
поэт, драматург, философ-просветитель

Построение графика позволяет представить все свойства функции в удобной для восприятия наглядной форме. Мы без труда можем построить[1] графики многих известных нам функций: прямой и обратной пропорциональностей, линейной функции, квадратичной функции, функции $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, а также график степенной функции с натуральным показателем.

Но как построить, например, график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ (мы рассматривали ее в последнем примере пункта 2.1.4)? Или любой другой функции, заданной тем или иным алгебраическим выражением?

В построении графика функции может помочь подробный анализ ее свойств. Например, решая уравнение $f(x) = 0$, мы сможем понять, в каких точках график пересечет ось абсцисс. По формуле $y = f(x)$ мы можем определить, является ли функция четной, а это расскажет нам о симметрии ее графика.

Выявим, как нужно изменить известный нам план исследования функции, чтобы его можно было использовать для построения графиков. Для этого построим, например, график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Сначала выберем те шаги плана, которые можно выполнить из аналитических соображений.

1. Найдем область определения функции. Функция определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Найти область значений данной функции по формуле достаточно сложно. Поэтому этот пункт исследования функции мы опустим.

3. Найдем нули функции $\dfrac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, график пересекает и ось абсцисс, и ось ординат в точке (0; 0).

Теперь найдем промежутки знакопостоянства. Для этого нам нужно решить неравенства $f(x) > 0$, и $f(x) < 0$.

Ясно, что $\dfrac{x}{x^2+1} > 0$ при $x > 0$; и $\dfrac{x}{x^2+1} < 0$ при $x < 0$.

4. Построение графика может облегчить знание о его симметрии. Ведь если функция четна или нечетна, можно ограничиться построением только части ее графика и достроить график из соображений симметрии. Поэтому исследуем функцию на четность.

[1] Строго говоря, речь здесь идет лишь о схематичном изображении графиков. Графики всех этих функций, кроме линейной, строятся нами лишь качественно.

Функция нечетна (для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$). Значит, график симметричен относительно начала координат и достаточно построить только часть графика при $x \geqslant 0$, а далее применить симметрию относительно точки (0; 0).

5. Построение графика функции может существенно облегчить знание о ее периодичности. Ведь для периодической функции можно ограничиться построением части графика на промежутке, равном ее периоду, а на потом просто копировать эту часть на остальные промежутки.

Достаточно ясно, что функция $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ не является периодической (если функция, являющаяся комбинацией многочленов, модулей и корней, периодична, то она постоянна – этот факт можно доказать и в общем виде).

Впрочем, попробуем доказать непериодичность именно этой функции.

В самом деле, пусть $\exists T > 0$: $\forall x \to f(x + T) = f(x)$. Тогда, взяв конкретное значение $x = 0$, получим: $f(T) = f(0)$, т.е. $\frac{T}{T^2 + 1} = 0$. Такое уравнение имеет единственное решение $T = 0$, а период должен быть положительным. Полученное противоречие показывает, что функция непериодична.

В конкретных задачах договоримся пока не проводить подобное доказательство.

Теперь введем дополнительные шаги исследования функции.

6. Полезным будет определить точки, при стремлении аргумента к которым функция неограниченно растет («стремится к бесконечности»)[2]. Такие точки дают нам вертикальные прямые, к которым неограниченно приближается график функции – **вертикальные асимптоты** графика.

Так как знаменатель $x^2 + 1$ нигде не обращается в нуль, то нет точек, при стремлении к которым $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ неограниченно растет. График не имеет вертикальных асимптот.

7. Теперь поймем, как ведет себя функция при неограниченном увеличении аргумента по модулю («стремлении x к бесконечности»). Если при этом значения функции стремятся к некоторому конечному числу, то существует горизонтальная прямая, к которой неограниченно приближается график функции – **горизонтальная асимптота** графика.

Так как $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$, то при всех $x > 0$ выполняется неравенство:

$$0 < f(x) < \frac{1}{x}.$$

Так как при неограниченном росте x значение $\frac{1}{x}$ неограниченно приближается к нулю, то это же имеет место и для меньшего выражения $f(x)$, то есть график неограниченно приближается к горизонтальной прямой $y = 0$ (оси абсцисс). В силу нечетности функции это же имеет место при неограниченном росте по модулю отрицательных значений x, т.е. график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (более «аккуратной» формулировки здесь мы пока привести не можем).

8. На основании этих данных можно, не вычисляя значения функции в конкретных точках, построить некоторое приближение к искомому графику – **эскиз графика** функции. Он изображен на рисунке 1.

[2] Определение предельного поведения аргумента и функции нам пока недоступно.

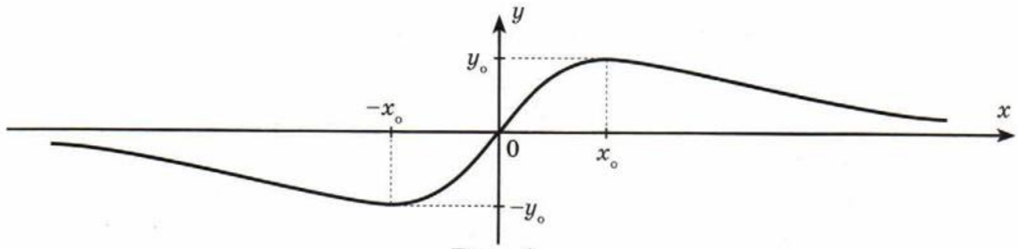


Рис. 1

Отсюда видно, что, скорее всего, найдется положительное число x_0 такое, что на отрезке $[-x_0; x_0]$ функция возрастет, а на лучах $(-\infty; -x_0]$ и $[x_0; +\infty)$ – убывает. В точке x_0 достигается наибольшее значение $f(x)$ на всей числовой прямой, равное y_0. В точке $-x_0$ достигается наименьшее значение $f(x)$ на всей числовой прямой, равное $(-y_0)$.

9. Эти утверждения достаточно доказать для положительных значений x и y, для отрицательных нужно применить нечетность функции.

Мы уже отмечали в п. 2.1.4, что из неравенства $(x-1)^2 \geqslant 0$, верного при всех x, следует, что $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$ при всех x, причем равенство достигается при $x = 1$. Поэтому наибольшее значение $f(x)$, равное $\frac{1}{2}$, достигается при $x = 1$, то есть $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$.

Теперь построим достаточное количество точек на графике с положительными абсциссами, чтобы не осталось сомнений в монотонности функции (это можно было сделать и аналитически).

Заполним таблицу:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
y	0,192	0,345	0,441	0,488	0,5	0,492	0,473	0,449	0,425

x	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8
y	0,4	0,345	0,3	0,264	0,235	0,192	0,162	0,14	0,123

Как мы видим, при $x > 1$ с увеличением значений x, значения y уменьшаются. Сомнений не остается! После этого можно окончательно вычертить график. Найденных точек более чем достаточно.

10. При построении графика для отрицательных значений x достаточно воспользоваться его симметрией относительно начала координат. Для соблюдения масштаба ограничимся значениями x, по модулю не превосходящими 2.

График функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ изображен на рисунке 2.

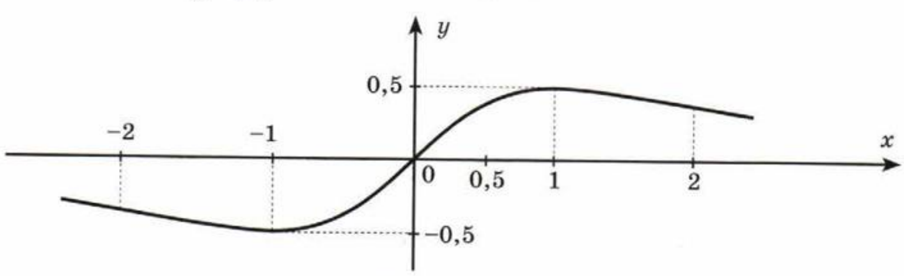


Рис. 2

Теперь мы можем зафиксировать следующий план исследования функции, который мы будем использовать с целью построения ее графика.

Общий план построения графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти область значений функции.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (то есть решить уравнение $f(x) = 0$ и найти значение функции $f(0)$). Найти интервалы знакопостоянства функции (то есть решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$).
4. Определить, является ли функция четной, нечетной
5. Определить, является ли функция периодической.
6. Выяснить, существуют ли вертикальные асимптоты графика.
7. Выяснить, существуют ли горизонтальные асимптоты графика.
8. На основании этих данных можно построить «эскиз графика». При этом возникнут некоторые гипотезы о расположении графика: например, что на некотором промежутке функция, скорее всего, сначала возрастет, потом убывает, и где-то во внутренней точке x_0 промежутка принимает наибольшее значение.
9. Попытаться прояснить «поведение» графика, доказав или опровергнув возникшие гипотезы. Для этого можно:
- по возможности применять аналитические соображения (т.е. приводить строгие доказательства);
- использовать уже известные аналогичные свойства более простых функций;
- если вышеописанные способы применить не получается, построить такое количество дополнительных точек на графике, чтобы не осталось сомнений в поведении графика (в любом случае построение «по точкам» не может считаться строгим доказательством нужных утверждений).

10. Завершить работу над графиком нужно, построив несколько дополнительных точек (если в этом возникает необходимость).

Следует отметить, что для некоторых сложных функций не все пункты этого плана могут быть реализованы изученными нами методами. Так, например, пункт, связанный с определением области значений, для функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ мы опустили.

* * *

Покажем, как можно было аналитически доказать, что функция возрастает на отрезке $[0; 1]$ и убывает на луче $[1; +\infty)$, остальные выводы о монотонности будут следовать из нечетности функции. Пусть $x_1 > x_2 \geqslant 0$. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} =$$
$$= \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

Так как $x_1 - x_2 > 0$, $x_1^2 + 1 > 0$, $x_2^2 + 1 > 0$, то знак разности определяется знаком разности $1 - x_1x_2$. Но если $x_1 > x_2 \geqslant 1$, то $x_1x_2 > 1$, $1 - x_1x_2 < 0$, тогда $f(x_1) - f(x_2) < 0$ и функция убывает на луче $[1; +\infty)$; если же $1 \geqslant x_1 > x_2 \geqslant 0$, то $x_1x_2 < 1$, $1 - x_1x_2 > 0$ и $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. функция возрастает на отрезке $[0; 1]$.

Если монотонность не установлена по таблице, а доказана строго, то достаточно взять 2 – 3 дополнительных точки на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ для установления окончательного вида графика. ■

Конечно, чем сложнее функция, тем сложнее будет элементарное аналитическое исследование монотонности, и, скорее всего, провести его не удастся.

Применим построенный план к функции, рассмотренной нами в примере 2б предыдущего пункта.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

1. Функция определена при всех $x \neq 1$ и $x \neq -1$, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Область значений функции определять пока не будем.

3. Легко видеть, что значение $f(x)$ никогда не обращается в нуль (график не имеет общих точек с осью абсцисс), а $f(0) = -2$, поэтому график пересекает ось ординат в точке $(0; -2)$.

Преобразуем функцию: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

Знак $f(x)$ совпадает со знаком знаменателя $x^2 - 1$; поэтому $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

4. Функция четна (для всех $x \in D(f)$, выполняется равенство $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2}{x^2-1} = f(x)$); значит, график симметричен относительно оси ординат, и достаточно построить только часть графика при $x \geqslant 0$; далее применить симметрию относительно оси ординат.

5. Выше мы отмечали, что такие функции не могут быть периодическими. Можно доказать непериодичность именно этой функции.

В самом деле, пусть $\exists T > 0$: $\forall x \to f(x + T) = f(x)$. Взяв конкретное значение $x = 0$, получим $f(T) = f(0) = -2$ – противоречие, которое показывает, что функция непериодична, так как $f(x) = -2$ только при $x = 0$.

6. Знаменатель $x^2 - 1$ обращается в нуль в точках $x = 1$ и $x = -1$, а числитель дроби равен 2. Поэтому при стремлении x к 1 и к (-1) значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются. График имеет вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$.

7. Так как функция x^2, а вместе с ней и $x^2 - 1$, неограниченно растет при стремлении x к бесконечности, то обратная положительная величина неограниченно приближается к нулю, другими словами при неограниченном росте x значение $\frac{2}{x^2-1}$ неограниченно приближается к нулю. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (ось абсцисс).

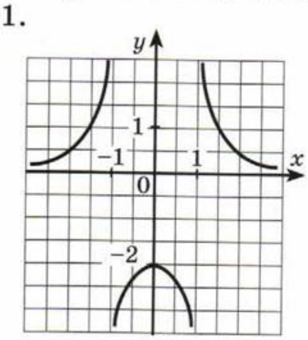


Рис. 3

8. На основании этих данных можно построить эскиз графика функции (рисунок 3).

9. В точке $x = 0$ достигается наибольшее значение $f(x)$ на интервале $(-1; 1)$. Это легко доказать, так как при $-1 < x < 1$ выполняются неравенства $-1 \leqslant x^2 - 1 < 0$, поэтому отрицательная обратная величина $\frac{1}{x^2-1}$ принимает значения из промежутка $(-\infty; -1]$, и $\frac{2}{x^2-1} = f(x) \leqslant -2$. Равенство достигается при $x = 0$; $x^2 - 1 = -1 \Rightarrow f(x) = -2$.

Далее, $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; 0]$, убывает на промежутках $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$. Так как функция четна, то достаточно провести доказательство для промежутков $[0; 1)$ и $(1; +\infty)$. На $(1; +\infty)$ функция $x^2 - 1$ возрастает и положительна, значит, обратная величина $\frac{1}{x^2-1}$ (а вместе с ней и $\frac{2}{x^2-1}$) убывает. В самом деле, если $x_1 > x_2 > 1$, то $x_1{}^2 - 1 > x_2{}^2 - 1 > 0$; значит $0 < \frac{1}{x_1{}^2 - 1} < \frac{1}{x_2{}^2 - 1}$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$ и функция убывает на (1; +∞). Аналогично, на [0; 1) функция $x^2 - 1$ возрастает и отрицательна, значит, обратная величина $\frac{1}{x^2-1}$ (а вместе с ней и $\frac{2}{x^2-1}$) убывает. В самом деле, если $1 > x_1 > x_2 > 0$, то $0 > x_1^2 - 1 > x_2^2 - 1 - 1$; значит, $\frac{1}{x_1^2-1} < \frac{1}{x_2^2-1} < 0$, то есть $f(x_1) < f(x_2)$, и функция убывает на [0; 1).

10. Если исследование на монотонность функции проведено аналитически, то для окончательного построения графика достаточно взять по 2–3 дополнительных точки на каждом из интервалов (0; 1) и (1; +∞); при отрицательных значениях x достаточно воспользоваться четностью функции.

Например, построим таблицу:

x	0,5	0,8	1,5	2	3
y	–2,67	–4,44	2,4	1,33	0,75

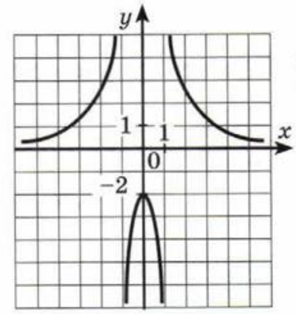


Рис. 4

После этого можно окончательно вычертить график. Он изображен на рисунке 4.

К **390** 1) Найдите нули функций $y = x^3$; $y = 4x^2 - 1$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 3x + 1$, решив соответствующие уравнения. В каких точках графики этих функций пересекут ось Ox?

2) Найдите, при каких x данные функции принимают положительные значения, решив соответствующие неравенства. На каких промежутках по оси Ox график каждой из этих функций лежит выше оси Ox? Можно ли выяснить, на каких промежутках график функции лежит ниже оси Ox, без использования графика?

3) Найдите среди этих функций четную и нечетную функции. Как это свойство отражается на графике функции?

391 1) Выберите из этих функций те, графики которых вы уже умеете строить:

$y = x^3$; $y = 4x^2 - 1$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 3x + 1$; $y = \frac{x}{x^2+1}$.

2) Что вы можете использовать для построения графика последней функции. Попробуйте построить график этой функции. Сопоставьте ход выполнения этого задания со способом построения этого графика, описанным на стр. 96 –98.

3) Постройте общий план построения функции, сравните свой вариант с планом на стр. 99.

392 Постройте графики функций:

а) $y = \frac{x}{|x|}$; б) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$; в) $y = \frac{1}{x^2+1}$; г) $y = \frac{x}{x^2-1}$.

П **393** Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2,8}}$; в) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 2\frac{7}{9}}$; д) $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

б) $\sqrt{\frac{11,7 \cdot 6}{0,15 \cdot 13}}$; г) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; е) $\sqrt{7 + \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{13}}$.

394 Что больше:

а) $2\sqrt{7}$ или $3\sqrt{3}$; б) $\sqrt{11}$ или $2\sqrt{3}$; в) $4\sqrt{6}$ или $\sqrt{95}$; г) 5,5 или $\sqrt{31}$?

395 Упростите:

а) $\frac{95}{(5\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$; в) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$; г) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

396 При каких x имеет смысл выражение:

а) $\frac{5x}{\sqrt{2-3x}}$; б) $\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{1-0{,}5x}}$; в) $\sqrt{\frac{x}{(4x+1)(2-x)}}$?

397 Решите графически уравнение $\sqrt{x}=6-x$.

Д **398** Постройте графики функций:

а) $y=\frac{1}{|x|}$; б) $y=\frac{x-1}{x^3-1}$; в) $y=\frac{2x}{x^2-4}$; г) $y=\frac{2x}{x^2+4}$.

399 Упростите:

а) $(2\sqrt{6}-\sqrt{3})(2\sqrt{6}+\sqrt{3})$; б) $\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$; в) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$; г) $\sqrt{9+18m^2+9m^4}$.

400 Расположите числа $2\sqrt{11}; 4\sqrt{3}$; 6,6 в порядке возрастания.

401 Сколько целых чисел расположено между $\sqrt{5}$ и $\sqrt{53}$?

402 При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$?

С **403*** Последовательность $\{a_n\}$ задается следующим образом: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ для любого натурального n. Докажите, что $a_{100}>14$.

2. Преобразования графиков функций

Нечто трудное делать легким – заслуга.

Иммануил Кант (1724 – 1804),
немецкий философ

При построении графиков линейной и квадратичной функций мы использовали такое преобразование, как сдвиг более простого вспомогательного графика ($y=kx$; $y=x^2$) вдоль осей координат. Возникает вопрос, можем ли мы использовать подобное преобразование в общем случае для функции $y=f(x)$? Ведь помимо прямой и параболы мы умеем строить и график $y=x^3$ (кубическую параболу), и $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ (гиперболу), а также $y=|x|$ («уголок»).

Это позволило бы нам строить графики более сложных функций без специального исследования их свойств. Отпала бы необходимость и в построении дополнительных точек. Зачем все это делать, если графики этих стандартных функций хорошо известны? В этом пункте мы ответим на этот вопрос и познакомимся с другими случаями преобразования графика.

I. *Параллельный перенос (сдвиг) графика вдоль оси ординат.*

Сравним функции $y = f(x)$ и $y = f(x) + h$, $h \in \boldsymbol{R}$. При преобразовании графика $y = f(x)$ в график $y = f(x) + h$ ($y = f(x) \to y = f(x) + h$) все значения функции $y = f(x) + h$ станут на h больше значений функции $y = f(x)$ в соответствующих точках.

Поэтому, **график функции $y = f(x) + h$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси ординат на h единиц вверх при $h > 0$, или на $|h|$ единиц вниз при $h < 0$.**

Пример 1.

Построить график $y = \frac{1}{x} - 1$, если известен график $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

Сдвинем график $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси ординат на 1 единицу вниз ($-1 < 0$). Получим график функции $y = \frac{1}{x} - 1$, изображенный на рисунке 1.

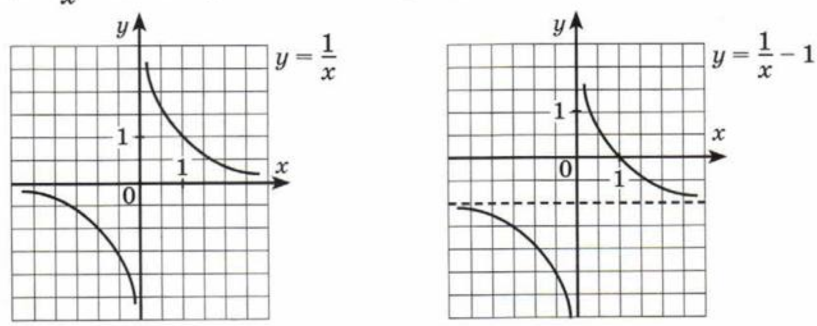


Рис. 1

График $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$; график $y = \frac{1}{x} - 1$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = -1$.

II. *Параллельный перенос (сдвиг) графика вдоль оси абсцисс.*

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(x - d)$, $d \in \boldsymbol{R}$. При таком преобразовании происходит «запаздывание» на величину d по переменной x. Если какое-то значение y_0 принималось функцией в точке 0, то сдвинутая функция принимает его «с запаздыванием» в точке d. Если график $y = f(x)$ имел вертикальную асимптоту $x = x_0$, то теперь значения функции стремятся к бесконечности при $x - d \to x_0$, то есть при $x \to x_0 + d$; имеем вертикальную асимптоту $x = x_0 + d$.

Значит, **график функции $y = f(x - d)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси абсцисс на d единиц вправо при $d > 0$, или на $|d|$ единиц влево при $d < 0$.**

Пример 2.

Построить график $y = \frac{1}{x - 1}$, если известен график $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

Сдвинем график $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси абсцисс на 1 единицу вправо ($1 > 0$). Получим график функции $y = \frac{1}{x - 1}$, изображенный на рисунке 2.

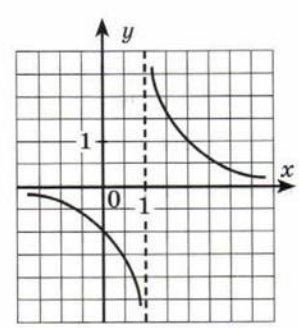


Рис. 2

График имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Объединяя случаи I и II, мы видим, что **график функции $y = f(x - d) + h$ можно получить при помощи двух последовательных параллельных переносов: сдвига графика $y = f(x)$ на $|d|$ единиц вдоль оси абсцисс и сдвига полученного графика $y = f(x - d)$ на $|h|$ единиц вдоль оси ординат** (с соответствующими оговорками в случае положительного или отрицательного значения d и h).

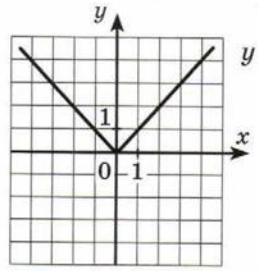
Иначе это можно сказать, что график **функции $y = f(x - d) + h$ можно получить параллельным переносом графика $y = f(x)$ на вектор $(d; h)$.**

Пример 3.

Построить график функции $y = |x + 3| - 1$.

Решение.

График $y = |x + 3| - 1$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом на 3 влево вдоль оси абсцисс и на 1 вниз вдоль оси ординат (рисунок 3).



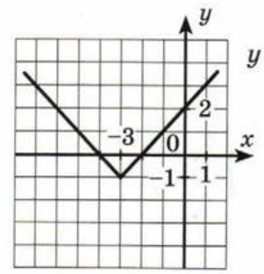


Рис. 3

Координаты вершины «уголка» $(-3; -1)$. График пересекает ось абсцисс в точках $(-4; 0)$ и $(-2; 0)$, ось ординат в точке $(0; 2)$. Это следует из того, что стороны угла параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$ и образуют углы в $45°$ с осью абсцисс (для нахождения точек пересечения с осью абсцисс можно решить уравнение $|x + 3| = 1$, а для нахождения точки пересечения с осью ординат можно подставить $x = 0$ в выражение $y = |x + 3| - 1$, но это делать необязательно, так как координаты точек пересечения очевидны из геометрических соображений).

Функция убывает на луче $(-\infty; -3]$ и возрастает на луче $[-3; +\infty)$; наименьшее значение функции на всей числовой оси достигается в точке $x_0 = -3$ и равно -1. Эти факты также можно считать геометрически очевидными. Для построения графика нет необходимости искать дополнительные точки; достаточно провести две прямые через точку $(-3; -1)$ под углом $45°$ к оси абсцисс. ■

* * *

В некоторых случаях удобно использовать и другие преобразования известных графиков. Познакомимся с этими преобразованиями.

III. *Сжатие или растяжение графика относительно оси абсцисс.*

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = kf(x)$, $k > 0$. При фиксированных абсциссах все ординаты точек графика увеличиваются в k раз, если $k > 1$; если $0 < k < 1$, происходит уменьшение всех ординат точек графика в $\frac{1}{k}$ раз. Таким образом, при $k > 1$, фактически происходит растяжение от оси абсцисс в k раз; а при $0 < k < 1$ – сжатие к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.

Значит, **график функции $y = kf(x)$, $k > 0$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью:**

- **сжатия графика $y = f(x)$ к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз ($0 < k < 1$);**
- **растяжения графика $y = f(x)$ от оси абсцисс в k раз ($k > 1$).**

Область определения функции при таком преобразовании не меняется.

Пример 4.

Построить график функции $y = 2\sqrt{1 - x^2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

График $y = \sqrt{1 - x^2}$ – верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат.

График $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ получается из него растяжением от оси абсцисс в 2 раза, график $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - x^2}$ – сжатием к оси абсцисс в 2 раза.

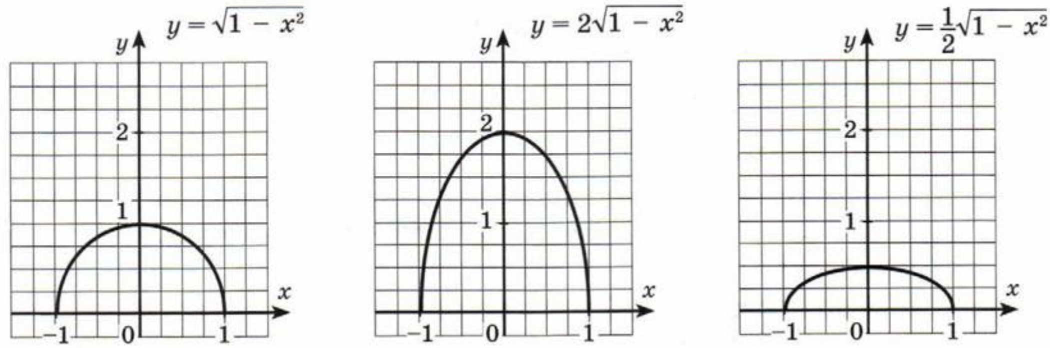


Рис. 4

IV. ***Сжатие или растяжение графика относительно оси ординат.***

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(kx)$, $k > 0$. При фиксированных ординатах все абсциссы точек графика $y = f(x)$уменьшаются в k раз (если значение y_0 функция $f(x)$ принимала в точке x_0, то функция $f(kx)$ принимает это значение в точке x_1 такой, что $kx_1 = x_0$, то есть $x_1 = \frac{x_0}{k}$. Например, если график $y = f(x)$ имел вертикальную асимптоту $x = 1$, то график $y = f(2x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{1}{2}$). Таким образом при $k > 1$ имеет место сжатие к оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ – растяжение от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз.

Область определения функции при таком преобразовании соответственно сжимается или растягивается.

Значит, **график функции $y = f(kx)$, $k > 0$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью:**

- **растяжения графика $y = f(x)$ от оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз ($0 < k < 1$);**
- **сжатия графика $y = f(x)$ к оси ординат в k раз ($k > 1$).**

Пример 5.

Построить график функции $y = \sqrt{1 - 4x^2}$, $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Решение.

График $y = \sqrt{1 - 4x^2} = \sqrt{1 - (2x)^2}$ получается из графика $y = \sqrt{1 - x^2}$ сжатием в 2 раза к оси ординат (рисунок 5а).

Область определения функции – отрезок $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

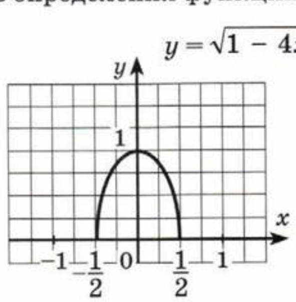


Рис. 5а

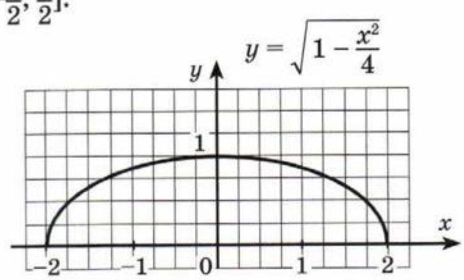


Рис. 5б

График $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2}$ получается из графика $y = \sqrt{1 - x^2}$ растяжением в 2 раза от оси ординат (рисунок 5б).

Область определения функции – отрезок $[-2; 2]$.

Пример 6.

Построить график функции $y = |6x + 3| - 1$.

Решение.

График функции $y = |6x + 3| - 1$ получается из графика $y = |x + 3| - 1$, построенного в примере 3, сжатием к оси ординат в 6 раз.

Этот график изображен на рисунке 6.

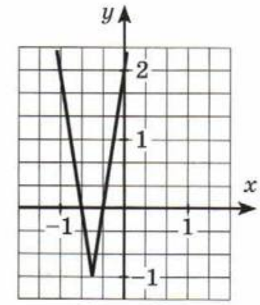


Рис. 6

404 1) Постройте графики $y = 2x$ и $y = x^2$.

2) Постройте график $y = 2x - 1$, используя график $y = 2x$. Постройте график функции $y = (x + 3)^2 - 1$, используя график $y = x^2$. Какое преобразование вспомогательного графика вы использовали?

3) Можно ли использовать подобный способ для построения графика функции $y = |x + 3| - 1$? Какой вспомогательный график вы будете использовать? Постройте график этой функции и сравните его с графиком на стр. 104.

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = f(x - d) + h$? Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на стр. 104.

405 Постройте графики функций, представив их в виде $y = (x - d)^3 + h$:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; б) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$; в) $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 30$.

406 Постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x + 2}$; б) $y = \frac{1}{x + 2} + 1$.

407 1) Постройте графики $y = x^2 + 1$ и $y = 2(x^2 + 1)$. Сравните расположения графиков относительно оси Ox. Чем отличается график $y = 2(x^2 + 1)$ от графика $y = x^2 + 1$?

2) Постройте график $y = 4x$ и $y = 2x$. Чем отличается график $y = 4x$ от графика $y = 2x$?

3) Обобщите сделанные вами наблюдения. Как они могут помочь построить график $y = 2\sqrt{1 - x^2}$, если график $y = \sqrt{1 - x^2}$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать?

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = kf(x)$, $k > 0$? Рассмотрите случай $0 < k < 1$. Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на стр. 104.

5) Познакомьтесь со способом построения графика $y = f(kx)$, $k > 0$.

408 Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$. С его помощью постройте графики функции $y = \frac{1}{2x}$ двумя способами. Сначала как график функции $y = \frac{1}{2}f(x)$, затем как график функции $y = f(2x)$.

409 Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{1{,}8} \cdot \sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}14}}$; б) $\frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{147} + \sqrt{63} - 7\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{14} - 2\sqrt{7}}$.

410 Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-49}{\sqrt{x}-7}$; в) $\dfrac{5\sqrt{t}-t\sqrt{5}}{\sqrt{t}-\sqrt{5}}$; д) $\dfrac{8\sqrt{y}-3}{\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{y}}{y}$;

б) $(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2-6\sqrt{ab}$; г) $\dfrac{c-6\sqrt{c}+5}{\sqrt{c}-5}$; е) $\dfrac{\sqrt{b}+4}{\sqrt{b}-4}-\dfrac{\sqrt{b}-4}{\sqrt{b}+4}$.

411 Упростите $\sqrt{69-16\sqrt{5}}$.

412 Определите, между какими двумя последовательными натуральными числами находится число $\frac{4}{3}\sqrt{63}$?

413 Решите неравенство $(1-\sqrt{2})x > 2-2\sqrt{2}$.

Д **414** Постройте графики функций, представив их в виде $y=(x-d)^3+h$:

а) $y=x^3-3x^2+3x-1$;

б) $y=x^3-3x^2+3x-3$;

в) $y=x^3-15x^2+75x-120$.

415 Постройте графики функций:

а) $y=5-\dfrac{1}{x}$; б) $y=5-\dfrac{1}{x+1}$.

416 Постройте график функции $y=f(x)$, где $f(x)=\sqrt{x}$. С его помощью постройте графики функции $y=3\sqrt{x}$ двумя способами. Сначала как график функции $y=3f(x)$, затем как график функции $y=f(9x)$.

417 Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{2,8}\cdot\sqrt{4,2}}{\sqrt{0,24}}$; б) $\dfrac{\sqrt{99}+\sqrt{363}-3\sqrt{11}}{33\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$.

418 Упростите выражение:

а) $\dfrac{v-16}{\sqrt{v}+4}$; в) $\dfrac{30\sqrt{k}-k\sqrt{30}}{\sqrt{k}-\sqrt{30}}$; д) $\dfrac{4\sqrt{m}-7}{\sqrt{m}}+\dfrac{7\sqrt{m}}{m}$;

б) $(2\sqrt{q}-\sqrt{p})^2+4\sqrt{qp}$; г) $\dfrac{w-7\sqrt{w}+12}{\sqrt{w}-3}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-5}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+5}$.

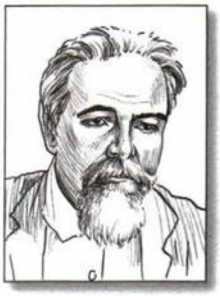
419 Определите, между какими двумя последовательными натуральными числами находится число $\frac{3}{4}\sqrt{112}$?

420 Упростите $\sqrt{67+16\sqrt{3}}$.

421 Решите неравенство $(2\sqrt{2}-3)x \leqslant (\sqrt{2}-1)^2$.

С **422*** Известно, что среди чисел $x+y$, $x-y$, x^2-y^2 и x^2+y^3 ровно одно отрицательное, а остальные положительны. Какие знаки могут иметь числа x и y?

3*. График дробно-линейной функции



Знание должно служить творческим целям человека. Мало накоплять знания; нужно распространять их возможно шире и применять в жизни.

Николай Александрович Рубакин (1862 – 1946)
русский просветитель, книговед, библиограф, писатель.

В предыдущем пункте мы видели, что преобразования графиков простых функций помогают строить графики более сложных функций. В этом пункте с помощью таких же преобразований мы еще более расширим свои возможности по построению графиков.

Рассмотрим, например, функции $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$, $y = \frac{x}{x - 3}$, $y = \frac{x + 3}{5x}$. На первый взгляд графики этих новых для нас функций можно построить только с помощью известного нам плана исследования функций, который довольно громоздок. Однако это можно сделать проще. Прежде чем выявить способ построения графиков данных функций, введем для них название.

Определение 1. Функция вида $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, причем $c \neq 0$ и разность $ad - bc \neq 0$, называется **дробно-линейной функцией**.

Если $c = 0$, то функция – линейная ($y = \frac{ax + b}{d}$, требуется еще условие $d \neq 0$). Если $ad - bc = 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, коэффициенты числителя пропорциональны коэффициентам знаменателя, и функция принимает одно и то же постоянное значение при всех x из ее области определения (например, $y = \frac{2x + 4}{3x + 6} = \frac{2(x + 2)}{3(x + 2)} = \frac{2}{3}$ при $x \neq -2$). Величину $ad - bc$ обычно обозначают греческой буквой Δ (читается «дельта»).

Попробуем преобразовать выражение $\frac{ax + b}{cx + d}$ к известной нам функции. Имеем:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c}\left(\frac{x + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{bc - ad}{ac(x + \frac{d}{c})}\right) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}.$$

Обозначим $\frac{a}{c} = y_0$, $-\frac{d}{c} = x_0$, $-\frac{\Delta}{c^2} = k$. Тогда $y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}$. Значит, график $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ можно получить из графика $y = \frac{k}{x}$ параллельным переносом на вектор $(x_0; y_0)$.

Функция $y = \frac{k}{x}$ нам хорошо известна, это обратная пропорциональность. Ее график – гипербола. Как мы знаем, функция $y = \frac{k}{x}$ определена при всех $x \neq 0$. При $k > 0$ она убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$, этот график изображен на рисунке 1а. При $k < 0$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$ – рисунок 1б. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

Таким образом, график дробно-линейной функции – это гипербола (так как если $\Delta \neq 0$, то $k \neq 0$, следовательно, мы исключили случай постоянной функции $y = y_0$).

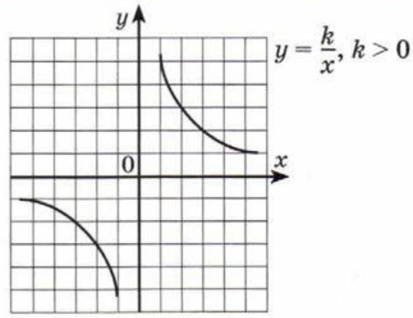


Рис. 1а

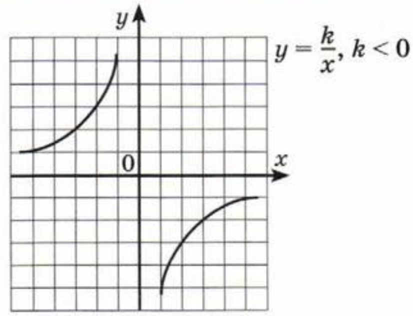


Рис. 1б

Отметим теперь **свойства дробно-линейной функции.**

1. Дробно-линейная функция $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0} = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ определена при всех $x \neq x_0$, то есть $x \neq -\dfrac{d}{c}$. Иначе говоря, $D(f) = \left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

2. Графиком дробно-линейной функции является *гипербола*.

3. При $\Delta > 0$ (то есть $k < 0$) функция возрастает на $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$. При $\Delta < 0$ (то есть $k > 0$) функция убывает на $\left(-\infty; -\dfrac{d}{c}\right)$ и на $\left(-\dfrac{d}{c}; +\infty\right)$.

4. График имеет горизонтальную асимптоту $y = \dfrac{a}{c}$ и вертикальную асимптоту $x = -\dfrac{d}{c}$.

Рассмотрим примеры построения графиков дробно-линейных функций.

Пример 1.

Построить график функции $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$.

Решение.

Имеем: $y = 2 \cdot \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x + 2} = 2 \cdot \dfrac{x + 2 - 2 - \frac{1}{2}}{x + 2} = 2\left(1 - \dfrac{\frac{5}{2}}{x + 2}\right) = 2 - \dfrac{5}{x + 2}$. Функция определена при $x \neq -2$, возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; +\infty)$. График получается из гиперболы $y = -\dfrac{5}{x}$ параллельным переносом на вектор $(-2; 2)$ и имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$ и вертикальную асимптоту $x = -2$.

Для построения эскиза графика целесообразно изобразить сначала асимптоты $y = 2$ и $x = -2$ и учесть, что график расположен во II и IV четвертях относительно этих асимптот. Этот эскиз изображен на рисунке 2.

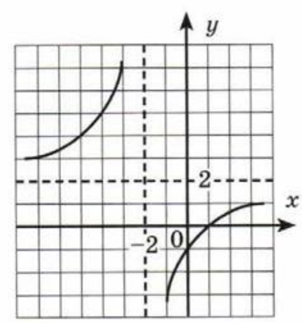


Рис. 2

Для уточнения расположения графика вычислим координаты точек пересечения графика с координатными осями:

с осью Ox: $y = 0$ при $x = \dfrac{1}{2}$;

с осью Oy: при $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$.

Найдем еще 2–3 дополнительных точки на каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-1	2	-3	-4	-5	-7
y	-3	$\frac{1}{2}$	7	$4{,}5$	$3\frac{1}{2}$	3

Построим теперь график $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$, он изображен на рисунке 3.

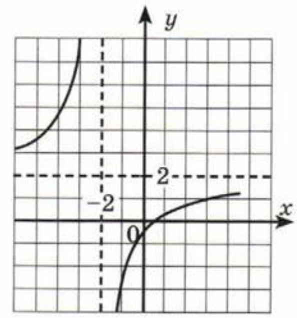


Рис. 3

Следует отметить, что гипербола $y = \dfrac{k}{x}$ центрально-симметрична относительно точки (0; 0) и имеет оси симметрии $y = x$ и $y = -x$. Поэтому график дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$ имеет центр симметрии $(x_0; y_0)$ и оси симметрии $y = y_0 + (x - x_0)$ и $y = y_0 - (x - x_0)$ – биссектрисы вертикальных прямых углов, образованных асимптотами графика.

Итак, можем сформулировать следующий способ построения графика дробно-линейной функции.

Чтобы построить график функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, нужно:

1. Преобразовать формулу $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ к виду $y = y_0 + \dfrac{k}{x - x_0}$.
2. Построить эскиз графика, с помощью параллельного переноса гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на вектор $(x_0; y_0)$, начиная с изображения асимптот $y = \dfrac{a}{c}$ и $x = -\dfrac{d}{c}$.
3. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
4. Найти координаты дополнительных точек для уточнения графика.
5. Построить график функции.

Пример 2.

Построить график функции $y = \dfrac{x}{x - 3}$.

Решение.

1) Имеем: $y = \dfrac{x - 3 + 3}{x - 3} = 1 + \dfrac{3}{x - 3}$. Функция определена при $x \neq 3$, убывает на $(-\infty; 3)$ и на $(3; +\infty)$. График функции получается из гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ параллельным переносом на вектор (3; 1) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = 3$.

2) Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 1$ и $x = 3$ и учтем, что график расположен в I и III четвертях относительно этих асимптот (рисунок 4).

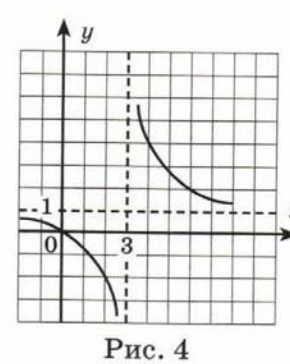


Рис. 4

3) $y(0) = \frac{0}{0 - 3} = 0$. Начало координат лежит на графике.

4) Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-1	2	1	4	5	7
y	$\frac{1}{4}$	-2	$-\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$

Построим теперь график окончательно. Он изображен на рисунке 5.

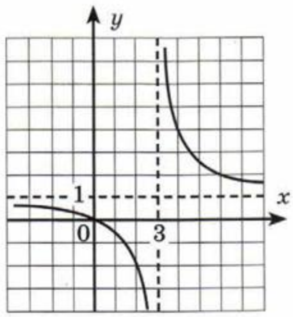


Рис. 5

423 1) Выберите из этих функций те, графики которых вы можете построить без вспомогательного исследования:

$y = -\frac{5}{x}$; $y = -\frac{5}{x + 2}$; $y = -\frac{5}{x + 2} + 2$; $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

2) Что вы можете использовать для построения графика последней функции? Попробуйте преобразовать формулу этой функции к известному виду и построить ее график. Сопоставьте ход выполнения этого задания со способом построения этого графика, описанным на стр. 109.

3) Постройте общий план построения функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, сравните свой вариант с планом на стр. 110.

424 Постройте графики функций:

а) $y = \frac{x + 1}{x}$; б) $y = \frac{x}{x + 1}$; в) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$; г) $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$.

425 Постройте график функции $y = \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3}$.

426 Докажите, что число $(2 - \sqrt{5})\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ является рациональным.

427 Докажите, что число $1 - \sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$.

428 Решите уравнение:

а) $27x^2 - 6\sqrt{3}x + 1 = 0$;

б) $(3x - 5)^2 - (2x + 4)^2 = (x + 3)^2$;

в) $(8x - 1)(3x + 5) - (2x - 1)(8x + 6) = 33x + 53$;

г) $7x^2 + 4x - 11 = 0$;

д) $(5x - 7)(8x + 1) = (8x + 1)^2$;

е) $\frac{2x^2 + 3x}{5} + \frac{3x^2 + 4x}{7} = \frac{5 - x}{2}$.

429 Составьте приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа $5\sqrt{2} - \sqrt{7}$ и $5\sqrt{2} + \sqrt{7}$.

430 Вычислите:

а) $|-5| + 6 - 11$; б) $|-5 + 6| - 11$; в) $|-5 + 6 - 11|$; г) $|-5 + 6 + |-11||$.

431 Решите уравнения:

а) $|-x + 6| = 6$; б) $|-2x + 4| = -4$; в) $|x + 14| = |6x|$; г) $|2x + 12| = -|x|$.

Д **432** Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{x-1}{x}$; б) $y = \dfrac{x}{x-1}$; в) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; г) $y = \dfrac{3x+2}{2x-1}$.

433 Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 10x + 9}{x^2 - 5x + 4}$.

434 Решите уравнение:

а) $3x^2 + 2\sqrt{51} \cdot x + 17 = 0$;

б) $(3x + 5)^2 - (2x - 4)^2 = (3 - x)^2$;

в) $(4x - 1)(3x + 10) - (x - 1)(4x + 6) = 35x + 106$;

г) $13x^2 + 4x - 9 = 0$;

д) $(5x - 11)(3x + 5) = (3x + 5)^2$.

С **435*** Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2011. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

4. Преобразование графиков: симметрия относительно осей координат. График $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$

Человек, который знает «как», всегда найдет работу, а человек, который знает «почему», будет его начальником.

Дайан Силверс Рейвич (р. 1938),
американский педагог

В этом пункте мы продолжим изучать преобразования графиков и выясним, как с их помощью построить графики функций с модулем.

Сначала уточним свои представления о построении графика, симметричного данному.

I. *Симметрия относительно оси абсцисс.*

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = -f(x)$. При фиксированных абсциссах все ординаты точек графика $y = -f(x)$ противоположны ординатам точек $y = f(x)$.

Значит, **график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью осевой симметрии относительно оси абсцисс.**

II. ***Симметрия относительно оси ординат.***

Рассмотрим преобразование $y = f(x) \to y = f(-x)$. При фиксированных ординатах все абсциссы точек графика $y = f(-x)$ противоположны абсциссам точек $y = f(x)$.

Значит, **график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью осевой симметрии относительно оси ординат.**

III. ***Симметрия относительно начала координат.***

Последовательное применение рассмотренных выше двух преобразований:

$y = f(x) \to y = -f(-x)$ меняет абсциссы и ординаты точек графика на противоположные.

Значит, **график функции $y = -f(-x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ с помощью центральной симметрии относительно начала координат.**

Рассмотрим примеры применения симметрии при построении графиков.

Пример 1.

Построить график функции $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$.

Решение.

Нужно применить преобразования I – III к графику вспомогательной функции $y = \sqrt{x}$. В первом случае областью определения функции будет луч $[0; +\infty)$, во втором и третьем случаях – луч $(-\infty; 0]$.Эти графики изображены на рисунке 1.

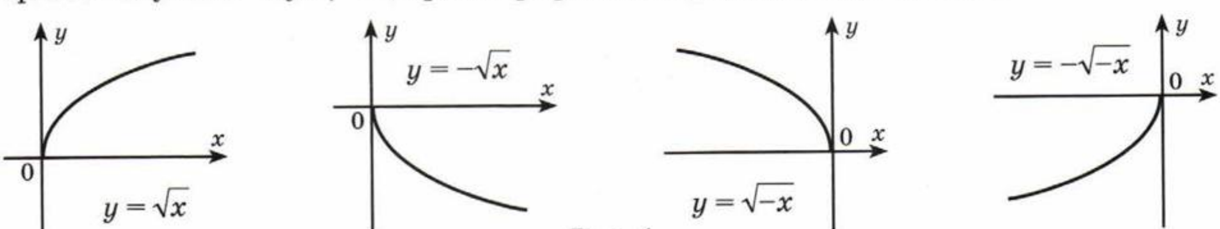


Рис. 1

Заметим, что в результате преобразования I область определения исходной функции не меняется. При преобразованиях II и III область определения меняется на множество из $\boldsymbol{R}$, симметричное $D(f)$ относительно начала координат. Если функция $f(x)$ четна, то в результате преобразования II ее график останется на месте (не изменится как множество точек плоскости), если нечетная – график не изменится при преобразовании III.

* * *

Рассмотрим еще несколько важных преобразований графика, использующих симметрию.

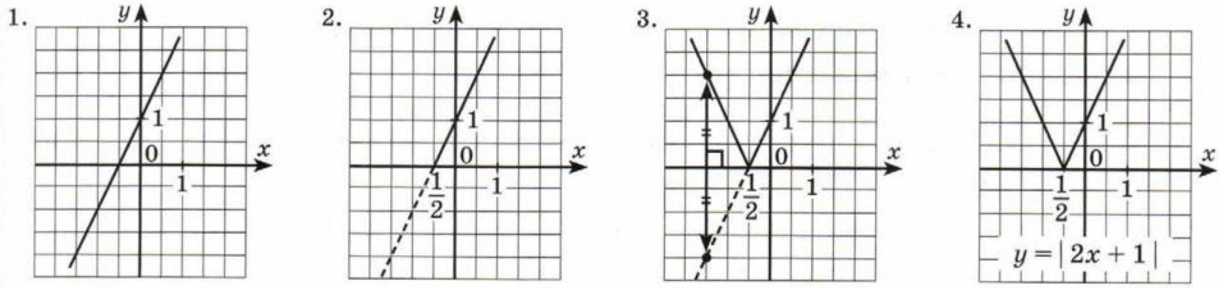
IV. $y = f(x) \to y = |f(x)|$.

Так как $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0 \end{cases}$, то часть графика $y = |f(x)|$, лежащая выше и на оси абсцисс, совпадает с графиком $y = f(x)$; а часть графика $y = |f(x)|$, лежащая ниже оси абсцисс, симметрична $y = f(x)$ относительно этой оси.

Значит, **чтобы построить график функции $y = |f(x)|$, нужно:**

1. **начертить вспомогательный график $y = f(x)$;**
2. **часть графика, лежащую выше и на оси абсцисс, оставить неизменной;**
3. **часть графика, лежащую ниже оси абсцисс, отразить симметрично относительно этой оси;**
4. **искомый график будет объединением множеств точек, описанных в пунктах 2 – 3.**

Так, график функции $y = |\,2x + 1\,|$ может быть построен из графика $y = 2x + 1$ с помощью этого способа следующим образом:



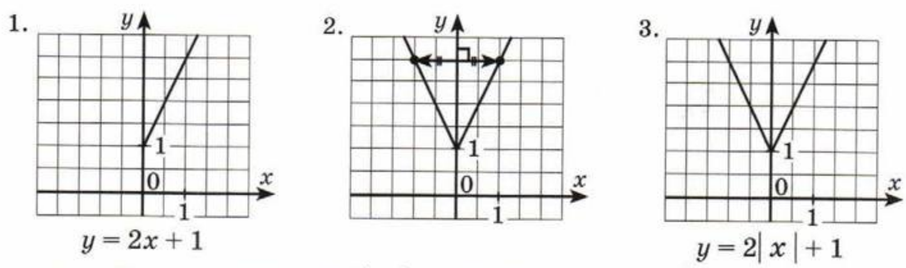
V. $y = f(x) \to y = f(|\,x\,|)$.

При неотрицательных значениях аргумента $y = f(|\,x\,|) = f(x)$, значит, часть графика $y = f(|\,x\,|)$, лежащая правее и на оси ординат, совпадает с графиком $y = f(x)$. Если же значения аргумента отрицательны, то $y = f(|\,x\,|) = f(-x)$, значит, часть графика $y = f(|\,x\,|)$, лежащая левее оси ординат, симметрична $y = f(x)$ относительно этой оси.

Значит, **чтобы построить график функции, можно $y = f(|\,x\,|)$ нужно:**

1. **начертить часть вспомогательного графика $y = f(x)$, лежащую правее и на оси ординат;**
2. **отразить эту часть симметрично оси ординат;**
3. **искомый график будет объединением множеств, изображенных в пунктах 1 – 2.**

Так, график функции $y = 2|\,x\,| + 1$ может быть построен из графика $y = 2x + 1$ с помощью этого способа следующим образом:



Заметим, что график функции $y = f(|\,x\,|)$ симметричен относительно оси ординат. Эта функция – четная.

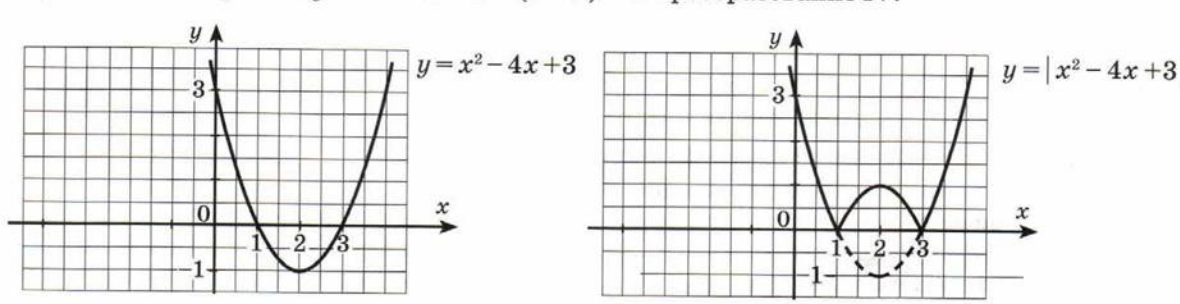
Замечание. Если ставится задача исследования графика, при построении которого применяются преобразования I – V, то нет необходимости специально исследовать окончательный график. Соответствующее исследование нужно провести для исходного графика $y = f(x)$ (или воспользоваться уже известными результатами), а для окончательного графика выводы можно сделать непосредственно по рисунку.

Пример 2.

Построить график функции $y = |\,x^2 - 4x + 3\,|$.

Решение.

Применим к параболе $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ преобразование IV:



Область определения функции $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [0; +\infty)$. Функция равна 0 при $x = 1$ и $x = 3$, при этих значениях достигается наименьшее значение функции. Наибольшее значение функции на отрезке $[1; 3]$ равно 1 и достигается при $x = 2$. Функция неотрицательна на всей области определения. Функция возрастает на $[1; 2]$ и на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$ и на $[2; 3]$.

Пример 3.

Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Решение.

Так как $x^2 = |x|^2$, то достаточно применить к параболе $y = x^2 - 4x + 3$ преобразование V – см. рисунок 2:

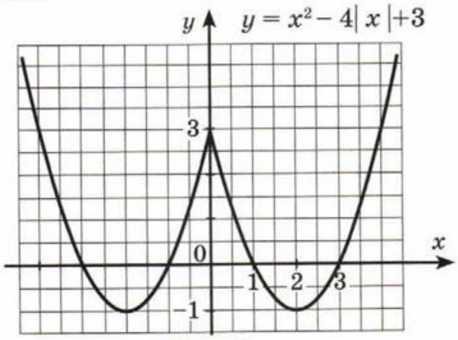


Рис. 2

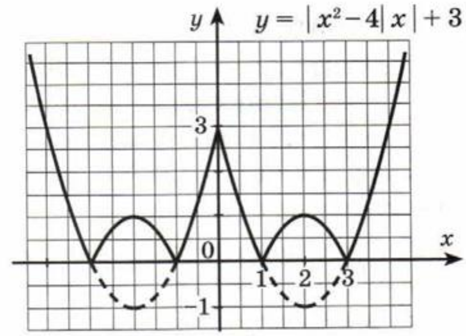


Рис. 3

Область определения функции $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [-1; +\infty)$. Функция является четной. Функция равна 0 при $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$. Наименьшее значение функции равно -1 и достигается при $x = -2$ и $x = 2$. Наибольшее значение на отрезке $[-3; 3]$ равно 3 и достигается при $x = 0$. Функция возрастает на $[-2; 0]$ и на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[0; 2]$.

Пример 4.

Построить график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

Решение.

Применим преобразование IV к графику из примера 3 (можно было бы применить преобразование V к графику из примера 2) – см. рисунок 3.

Область определения функции $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [0; +\infty)$. Функция является четной. Функция равна 0 при $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$. Функция возрастает на $[-3; -2]$, на $[-1; 0]$, на $[1; 2]$ и на $[3; +\infty)$. Функция убывает на $(-\infty; -3]$, на $[-2; -1]$, на $[0; 1]$ и на $[2; 3]$. Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при следующих значениях x: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$. Наибольшее значение функции на $[1; 3]$ равно 1 и достигается при $x = 2$. Наибольшее значение функции на $[-3; -1]$ равно 1 и достигается при $x = -2$. Наибольшее значение функции на $[-1; 1]$ равно 3 и достигается при $x = 0$.

К **436** 1) Постройте графики $y = x^2 + 1$ и $y = -(x^2 + 1)$. Сравните расположения графиков относительно оси Ox. Чем отличается график $y = -(x^2 + 1)$ от графика $y = x^2 + 1$?

2) Постройте график $y = 2x - 1$ и $y = -(2x - 1)$. Чем отличается график $y = -(2x - 1)$ от графика $y = 2x - 1$?

3) Обобщите сделанные вами наблюдения. Как они могут помочь построить график $y = -\sqrt{1 - x^2}$, если график $y = \sqrt{1 - x^2}$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать?

4) Подумайте, можно ли использовать данный способ для построения графика $y = -f(x)$, если имеется график функции $y = f(x)$? Составьте правило построения графика такой функции и сопоставьте свои выводы с выводами на стр. 112.

5) Познакомьтесь со способом построения графиков $y = f(-x)$ и $y = -f(-x)$.

437 Постройте графики функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$, если:

а) $f(x) = 2x - 5$; б) $f(x) = |x + 1| - 1$; в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; г) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$.

438 Из функций $y = 2x$, $y = |2x - 4|$, $y = 5x^2 - 14$, $y = |x^2 + 1|$, $y = \left|\frac{3}{x}\right|$, $y = 2|x| - 8$ выберите функции вида $y = |f(x)|$. Укажите множество значений выбранных вами функций.

439 1) Постройте график $y = 2x + 1$;

2) Постройте график $y = |2x + 1|$.

3) Сравните полученные графики. Чем отличается график $y = |2x + 1|$ от графика $y = 2x + 1$? Опираясь на определение модуля, объясните, почему часть графика $y = |2x + 1|$, лежащая выше и на оси абсцисс, совпадает с графиком $y = 2x + 1$, а часть графика $y = |2x + 1|$, лежащая ниже оси абсцисс, симметрична $y = 2x + 1$ относительно этой оси.

4) Как сделанные вами наблюдения могут помочь построить график $y = |f(x)|$, если график $y = f(x)$ уже построен? Какое преобразование вспомогательного графика вы будете использовать? Составьте правило построения графика функции $y = |f(x)|$ и сопоставьте его со способом, описанным на стр. 113.

5) Познакомьтесь со способом построения графика $y = f(|x|)$.

440 Постройте графики функций:

а) $y = |x^2 - 3x + 2|$; б) $y = x^2 - 5|x| + 6$; в) $y = \left|\frac{2x}{x - 2}\right|$; г) $y = ||x - 2| - 1| - 1$.

441 Сколько решений имеет уравнение $||2x - 3| - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a? Проведите исследование, опираясь на график функции $y = ||2x - 3| - 1|$.

П **442** 1) Какое из уравнений не имеет решения? Почему?

а) $|x| = 5$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$.

2) Объясните, почему уравнение $|x| = -|2x - 1|$ не имеет решения.

3) Может ли корень уравнения обращать правую часть уравнения в отрицательное число?

а) $|2x - 3| = x$; б) $|2x - 1| = -x$.

4) Решите уравнение:

а) $|2x - 3| = x$; б) $|2x - 1| = -x$; в) $|x + 12| = 5x$; г) $|2x + 1| = -x + 4$.

Сделайте проверку, подставив полученные корни в исходное уравнение.

443 Решите уравнение:

а) $(2x^2 - x + 1)^2 - 2(2x^2 - x + 1) + 1 = 0$; б) $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.

444 Две бригады, восстанавливая лес после пожара, закончили посадку деревьев за 4 дня. Сколько дней потребуется на выполнение такого же объема работы отдельно каждой бригаде при условии, что одна из них может выполнить эту работу на 15 дней быстрее другой?

Д **445** Постройте графики функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$, если:

а) $f(x) = 2 - 3x$; б) $f(x) = |x - 2| + 1$; в) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; г) $f(x) = -\frac{1}{x - 2}$.

446 Постройте графики функций:

а) $y = |x^2 + 5x - 6|$; б) $y = x^2 - 4|x| - 12$; в) $y = \left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|$; г) $y = \|2x - 5| - 1| - 2$.

447 Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 6|x| + 5| = a$ в зависимости от значения параметра a?

448 Решите уравнения:

а) $|3x - 5| = 2x$; б) $|5x - 9| = -4x$; в) $|x + 18| = 7x$.

Сделайте проверку, решив эти уравнения графически.

449 Решите уравнение $4(x^2 - x)^2 + 9(x^2 - x) + 2 = 0$.

450 Один из цехов мебельного завода должен был изготовить 810 фанерных листов, а второй – 900 таких же листов. Рабочие первого цеха выполнили все задание, затратив на это на 3 дня больше, чем рабочие второго цеха. Какова производительность труда в каждом цехе, если во втором делали в день на 4 листа больше, чем в первом?

C **451*** Постройте график функции $y = \left|\dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{x^2 - 6|x| + 8}\right|$.

Экспресс-тест № 3

Примерное время выполнения – 40 минут

Часть А

№ 1

№1. Дана функция $y(x) = -x^2 + 2x$. Найдите $y(-x)$.

А) $-x^2 - 2x$; В) $x^2 - 2x$;

Б) $-x^2 + 2x$; Г) $-3x^3$.

№ 2

№2. Найдите область определения обратной пропорциональности, изображенной на рисунке 1:

А) $(-\infty; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

В) $(-3; 0) \cup (0; 3)$.

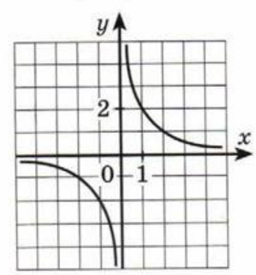


Рис. 1

№ 3		
1	2	3

№3. Функция задана графиком, изображенным на рисунке 2. Установите соответствие между промежутками

1) $[-3; 3]$; 2) $(-3; 3)$; 3) $[0; 3]$

и свойствами, указанными для них:

А) функция отрицательна;

Б) область определения функции;

В) функция возрастает.

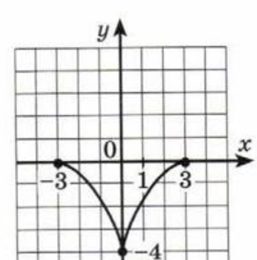


Рис. 2

№ 4

№4. Используя график функции, изображенный на рисунке 3, определите, какое из утверждений верно:

А) $f(-2) > f(4)$;

Б) $f(2) = 0$;

В) $y = f(x)$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$;

Г) $y_{\text{наиб.}} = 1$;

Д) $y = f(x)$ является четной функцией.

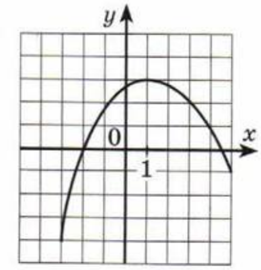


Рис. 3

№ 5

№5. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке 4.

А) $y = \sqrt{x - 2}$;

Б) $y = \sqrt{x + 2}$;

В) $y = \sqrt{x} + 2$;

Г) $y = \sqrt{x} - 2$.

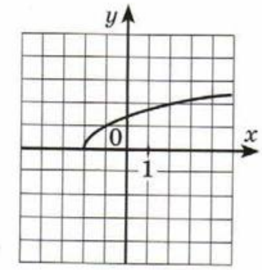


Рис. 4

Часть В

№ 6

№6. Постройте график $y =(x - 1)^2 - 2$. Укажите промежуток возрастания функции.

А) $(-\infty; 1]$;

Б) $(-\infty; 2)$;

В) $[2; +\infty)$;

Г) $[1; +\infty)$.

№ 7

№7. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке 5.

А) $y = | x^2 + 3 |$;

Б) $y = | (x - 3)^2 |$;

В) $y = | x^2 | - 3$;

Г) $y = | x^2 - 3 |$.

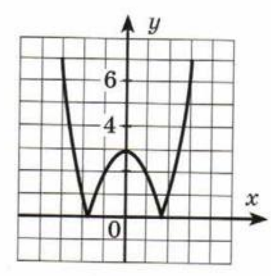


Рис. 5

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№8. Постройте график функции $y = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$.

Укажите:

1) нули функции,

2) промежутки знакопостоянства,

3) промежутки убывания,

4) какие значения принимает функция при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3			№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
		1	2	3				
А	Б	Б	А	В	В	Б	Г	Г

№ 8

Преобразуем формулу

$$y = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2x-6+6-1}{x-3} = \frac{2x-6+5}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 2.$$

График функции $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$ может быть получен из графика функции $y = \dfrac{5}{x}$ с помощью двух параллельных переносов на 3 единицы вправо вдоль оси Ox и на 2 единицы вверх вдоль оси Oy.

График имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$ и вертикальную асимптоту $x = 3$.

Найдем точки пересечения с осями:

$\dfrac{2x-1}{x-3} = 0$ при $x = 0{,}5$;

$y(0) = \dfrac{1}{3}$.

Найдем несколько дополнительных точек:

x	-2	-1	1	2	$4{,}5$	5	6
y	1	$0{,}75$	$-0{,}5$	-3	$5\frac{1}{3}$	$4{,}5$	$3\frac{2}{3}$

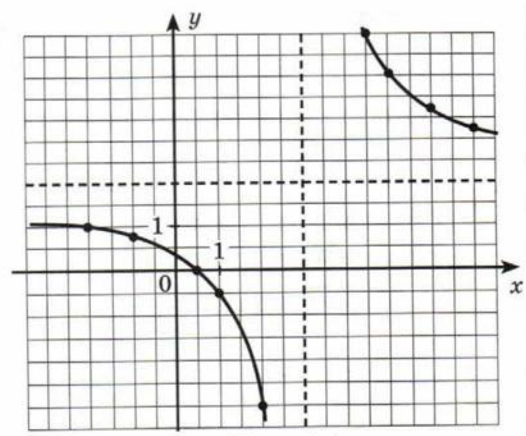


Рис. 6

Построенный график изображен на рисунке 6.

Функция равна нулю при $x = 0{,}5$.

Функция положительна при $x \in (-\infty;\ 0{,}5) \cup (3;\ +\infty)$.

Функция отрицательна при $x \in (0{,}5;\ 3)$.

Функция убывает на каждом из двух лучей $(-\infty;\ 3)$ и $(3;\ +\infty)$.

При $0 \leqslant x \leqslant 2$ функция принимает значения из промежутка $[-\frac{1}{3};\ 3]$.

Шкала успешности:

9 – 10 баллов – *отлично*

7 – 8 баллов – *хорошо*

5 – 6 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к главе 2

452 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $x^2 + (y-1)^2 = 16$; б) $(x-1)^2 + y^2 = 16$; в) $(x-1)^2 - y = 0$; г) $(|x| - 1)^2 - y = 0$.

Какие из построенных вами графиков уравнений задают функции?

453 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x^2 + (y-1)^2 > 16$; б) $(x-1)^2 + y^2 < 16$; в) $(x-1)^2 - y > 0$; г) $(|x| - 1)^2 - y < 0$.

454 Дана функция $y(x) = x^2$. Найдите:

а) $y(-x)$; б) $y\left(\dfrac{2}{x}\right)$; в) $y(2-x)$; г) $2y(x)$; д) $y(y(x))$; е) $y(y(3x))$.

455 Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-3}$; б) $y = 4x^2 - 12x + 5$; в) $y = \dfrac{x^2 + x}{x}$; г) $y = \dfrac{4-x}{2}$; д) $y = \dfrac{4-x^2}{9+x^2}$.

456 Найдите множество значений функции:

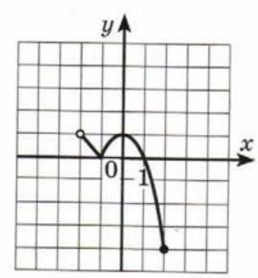
а) $y = x + \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{3x}{1+x^2}$; в) $y = \sqrt{x+6}$; г) $y = |x+5|$; д) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}$.

457 Определите, какие функции являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными:

а) $y = 5\sqrt{x^2} + 2x^6$; в) $y = \dfrac{|x|}{x^2 - 3}$; д) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

б) $y = 2 + \dfrac{x}{x-5}$; г) $y = 3 - \sqrt{2+x}$; е) $y = |x+1| - 3$.

458 Функция $y = f(x)$ задана графиком (см. рисунок).



Какое из следующих утверждений ложно:

1) $D(y) = (-2; 2]$;

2) $E(y) = [-4; 1]$;

3) $f(x) = 0$ при $x \in \{-1; 1\}$; $f(x) < 0$ при $x \in (1; 2]$;
$f(x) > 0$ при $x \in (-2; -1)\ (-1; 1)$;

4) $f(x)$ возрастает при $x \in (-2; -1]$ и при $x \in [0; 2]$;
убывает при $x \in [-1; 0]$?

459 Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$. Укажите ее область значений.

460 Постройте график функции $y = |x^2 + 2x|$. При каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком этой функции две общие точки?

461 Постройте график дробно-линейной функции $y = \dfrac{3x+6}{x+3}$.

462 Постройте график функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-2}, \text{ если } 2 < x < 6; \\ -x^2 + 4, \text{ если } -3 < x < 2. \end{cases}$

Найдите область определения и область значения функции $y = f(x)$, определите промежутки знакопостоянства, возрастания, убывания.

463 Решите графически уравнение:

а) $|x^2 - 4| = 5$; б) $\dfrac{4x-4}{x-3} = 7 - x$.

Проверьте свое решение аналитически.

Глава 3

Числовые последовательности

§ 1. Последовательности и их общие свойства

1. Последовательности. Способы задания последовательностей

Что пользы в том, что ты многое знал, раз ты не умел применять твои знания к твоим нуждам.

Франческо Петрарка (1304–1374),
итальянский поэт

Ранее мы не раз встречались с понятием числового ряда. Еще в начальной школе мы искали закономерности и самостоятельно продолжали ряд по нескольким его элементам; при анализе статистических данных мы работали с упорядоченным конечным набором чисел – результатами различных измерений и наблюдений и пр.

Вспомним примеры заданий, в которых мы работали с некоторым упорядоченным рядом чисел.

1) Найдите закономерность и запишите следующие два числа в ряду положительных чисел:

а) $\frac{100}{99}; \frac{98}{97}; \frac{96}{95}; \dots$;   б) 1,1; 2,02; 3, 003; ... ;   в) 1; 4; 9; 16... .

2) В течение месяца проводите ежедневные измерения температуры воздуха и найдите среднее значение и размах полученных данных.

Результаты измерения температуры из второго задания образуют числовой ряд, состоящий не более, чем из 31 числа, количество чисел в ряду задания 1а будет равно 50. В отличие от них числа рядов в заданиях 1б и 1в можно продолжать выписывать до бесконечности.

Такие бесконечные ряды чисел называют *бесконечными числовыми последовательностями*. Приведем еще несколько примеров бесконечных числовых последовательностей, которые нам уже знакомы:

1; 2; 3; 4; ... – последовательность натуральных чисел;

2; 4; 6; ... – последовательность четных натуральных чисел;

1; 8; 27; ... – последовательность кубов натуральных чисел;

2; 3; 5; 7; 11; 13; ...– последовательность простых чисел.

Далее вместо «бесконечная числовая последовательность» будем говорить просто «последовательность».

Бывают и такие последовательности, которые составлены только из нескольких чисел (–1; 1; –1; 1; ...) или даже одного числа (5; 5; 5; ...).

Последовательности помогают описывать многие процессы из окружающего нас мира. Так, например, рассчитать сумму кредита, взятого под определенный процент, помогут знания о последовательностях. Поэтому мы займемся их изучением, но сначала уточним понятия, связанные с последовательностями, и обозначения, которые принято использовать для их записи.

Определение 1. Числа, образующие последовательность, называют **членами последовательности;** число, стоящее на первом месте в последовательности, называют **первым членом последовательности**, на втором – вторым членом, ... на месте под номером n – **общим членом последовательности** (n-ым членом).

Обозначают члены последовательности буквой латинского алфавита с индексами, показывающими их порядковые номера, например,

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

Тогда саму эту последовательность обозначают (y_n).

Отметим, что член последовательности, стоящий перед y_n, обозначают y_{n-1} (так как его номер $n - 1$), а член последовательности, стоящий после y_n, обозначают y_{n+1}.

Таким образом, для любой последовательности мы можем указать, какое ее число имеет номер 1, какое – номер 2, и так далее.

Пример 1.

С помощью числа $\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\ 671$ $875\ 376\ 948\ 073\ 176\ 679\ 737\ 99\ldots$(выписаны первые 65 цифр) рассмотрим следующие последовательности:

1) (a_n) – последовательность целых неотрицательных чисел, получаемых при выписывании цифр этого числа последовательно – до запятой, первой цифры после запятой, второй цифры после запятой, ... и т.д.:

$$1; 4; 1; 4; 2; 1; 3; 5; 6; 3; 7; 3; 0;\ldots$$

2) (b_n) – последовательность конечных десятичных дробей, являющихся округлениями числа $\sqrt{2}$ с недостатком:

$$1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}41421; 1{,}414213; 1{,}4142135; \ldots .$$

Укажите седьмой член каждой из этих последовательностей.

Решение.

В последовательности (a_n) под номером 7 идет число 3, значит, $a_7 = 3$. В последовательности (b_n) под номером 7 идет число 1,414213, значит, $b_7 = 1{,}414213$.

До сих пор мы рассматривали последовательность, выписывая несколько ее первых членов или описывая, каким образом составлена эта последовательность. Однако такие способы задания последовательностей не очень удобны и чаще всего последовательности задают с помощью формул. Познакомимся с ними.

Для примера рассмотрим последовательность: (x_n): 2; 4; 8; 16.... Первый ее член равен 2, а каждый последующий член получается из предыдущего умножением на 2. Опишем ее, используя введенные нами обозначения:

$$x_1 = 2;\ x_2 = 2x_1;\ x_3 = 2x_2;\ \ldots;\ x_{n+1} = 2x_n;\ \ldots .$$

Ясно, что для задания этой последовательности достаточно указать ее первый член $x_1 = 2$, и то, как вычислить каждый ее следующий член: $x_{n+1} = 2x_n$.

Если задан первый член последовательности и формула, выражающая каждый последующий член через предыдущий (т.е. x_{n+1} через x_n), то говорят, что **последовательность задана рекуррентно.**

Заметим, что члены этой последовательности (x_n): 2; 4; 8; 16 ... являются натуральными степенями числа 2: 2^1; 2^2; 2^3; 2^4... . Понятно, что если $x_1 = 2^1$; $x_2 = 2^2$; $x_3 = 2^3$; ..., то ее n-й член можно записать, как $x_n = 2^n$. Последнее равенство можно рассматривать как формулу, которая позволяет вычислить любой член этой последовательности. Тогда эту последовательность можно задать, указывая лишь формулу ее общего члена: $x_n = 2^n$. В таких случаях говорят, что **последовательность задается формулой общего члена**.

* * *

Мы записали, что формула общего члена $x_n = 2^n$, обобщив наблюдения за первыми членами последовательности. Строго это можно доказать методом математической индукции. В самом деле, при $n = 1$ имеем $x_1 = 2^1 = 2$, т.е. база индукции проверена. Если при фиксированном натуральном n выполняется равенство $x_n = 2^n$, то $x_{n+1} = 2 \cdot x_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Значит, $x_n = 2^n$ при всех натуральных n.

Пример 2.

Выпишите четвертый член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 5a_n$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 5n$.

Решение.

а) Чтобы найти четвертый член последовательности (a_n), мы должны последовательно вычислить все стоящие перед ним члены:

$a_2 = 5a_1 = 5 \cdot 2 = 10$, тогда $a_3 = 5a_2 = 5 \cdot 10 = 50$ и $a_4 = 5a_3 = 5 \cdot 50 = 250$.

б) Четвертый член последовательности (b_n) мы можем найти сразу $b_4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: а) 250; б) 20.

Как видно, при нахождении нужного нам члена последовательности формула n-го члена более удобна (она позволяет вычислить искомый член сразу, не находя всех предыдущих его членов).

Отметим, что при рекуррентном способе задания последовательности иногда требуется указывать не один, а несколько первых членов последовательности. Именно таким способом задается *последовательность Фибоначчи* (по имени итальянского математика XIII в. Леонардо Пизанского, или Фибоначчи). Зададим первые два члена этой последовательности и формулу, выражающую каждый последующий член через два предыдущих (т.е. x_{n+2} через x_{n+1} и x_n):

$$x_1 = x_2 = 1 \text{ и } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + 1 = 2$, $x_4 = 2 + 1 = 3$, $x_5 = 3 + 2 = 5$ и т.д.

Получим последовательность Фибоначчи (x_n): 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21... .

* * *

Для последовательности Фибоначчи можно получить и формулу n-го члена последовательности x_n, но это уже значительно сложнее.

Докажем, что $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $n = 1,2,\ldots$ (любопытно, что такое громоздкое на первый взгляд иррациональное выражение на самом деле является натуральным числом). Для этого применим «индукцию с шагом два», т.е. проверим справедливость равенства при $n = 1$ и $n = 2$, а затем покажем, что из выполнения равенства при фиксированных натуральных значениях n и $n + 1$ следует его справедливость для следующего значения $n + 2$.

Доказательство.

Имеем: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 1;$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{4}\right) = 1.$$

Если нужное равенство выполняется при фиксированных натуральных значениях n и $n+1$, то $x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Заметим, что $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, поэтому

$$x_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Значит, нужное равенство выполняется при всех натуральных n. ■

Пример 3.

Найти формулу общего члена последовательности (x_n) такой, что $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 3x_n - 2$, $n = 1, 2, ...$

Решение.

Попытаемся угадать формулу общего члена, а затем строго доказать ее методом математической индукции.

Имеем: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$, $x_3 = 28$, $x_4 = 82$, $x_5 = 244$. Так как последовательные степени числа 3 равны 3, 9, 27, 81, 243, то легко заметить, что $x_n = 3^n + 1$, $n = 1, 2, ...$. Теперь докажем это равенство. Уже проверено, что $x_1 = 3 + 1 = 4$.

Пусть равенство $x_n = 3^n + 1$ установлено при фиксированном натуральном n.

Тогда $x_{n+1} = 3\,x_n - 2 = 3(3^n + 1) - 2 = 3 \cdot 3^n + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$; нужное равенство получено для следующего значения $n + 1$. Методом математической индукции доказано, что $x_n = 3^n + 1$ при всех натуральных n.

Конечно, догадаться до такого равенства, выражающего x_n, бывает совсем непросто. Полезным было бы научиться получать формулу общего члена алгоритмическим способом (без угадывания нужного равенства и дальнейшего применения математической индукции). К поиску такого способа мы вернемся в конце этой главы.

Отметим, что не все последовательности можно задать с помощью формул. Так, уже встречавшуюся нам в этом пункте последовательность простых чисел никакой формулой описать нельзя и ее задают словесным описанием.

Итак, **последовательность можно задавать:** аналитически (рекуррентной формулой или формулой общего члена), перечислением ее членов или словесным описанием.

В заключение заметим, что бесконечная числовая последовательность является частным случаем функции. Эта функция ставит в соответствие каждому натуральному числу определенное действительное число.

Определение 2. **Бесконечной числовой последовательностью** называется функция, область определения которой является множество натуральных чисел ($D(f) = \boldsymbol{N}$), а множество значений является подмножеством множества действительных чисел ($E(f) \subset \boldsymbol{R}$).

Как всякую функцию, бесконечную числовую последовательность можно записать в виде $y = f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$. Как мы видели, аргумент этой функции принято записывать в виде индекса: f_n, где $n = 1, 2, ...$.

Вычислив значения функции $y = f(n)$, где, например, $f(n) = n^2$, при $n = 1$, $n = 2$, ..., получаем числа $f_1 = 1$, $f_2 = 4$, $f_3 = 9$, $f_4 = 16$ ... . Таким образом, получается последовательность, с которой мы в этом пункте уже встречались – последовательность квадратов натуральных чисел: 1; 4; 9; ..., заданная формулой общего члена $f_n = n^2$.

К **464** Найдите закономерность и продолжите ряд на три числа:

а) $-8; -5; -2; 1; 4; ...$;

б) $-\frac{3}{7}; 3; -21; 147; ...$;

в) 15,3; 5,1; 1,7; ... .

465 Найдите закономерность, с помощью которой составлена нижняя строка таблицы, и запишите ее с помощью формулы.

а)

x	1	2	3
y	3	4	5

б)

x	1	2	3
y	1	4	9

в)

x	1	2	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

466 Последовательность чисел задана формулой: $y_n = 3^n$, где $n \in N$.

1) Запишите следующие члены этой последовательности: y_1; y_2; y_3; y_n; y_{n+1};

2) Во сколько раз y_2 больше y_1; y_3 больше y_2; y_{n+1} больше y_n?

3) Объясните, какими способами можно найти каждый член этой последовательности.

4) Предположите, как можно задавать последовательности. Сравните свои предположения с учебником на стр. 122 – 123.

467 Запишите пять первых членов последовательности:

а) двузначных чисел, кратных 9, взятых в порядке возрастания;

б) правильных дробей с числителем 19, взятых в порядке убывания;

в) натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 4, взятых в порядке возрастания.

468 Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = 5 - n$; б) $a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$.

469 Рассмотрите последовательность последних цифр чисел 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n... :

$$2, 4, 8, 6, 2, 4, ...$$

а) чему равен десятый член последовательности?

б) может ли какой-то член равняться 5? А нулю? Как можно обосновать ответ на эти вопросы, учитывая то, что в последовательности бесконечно много членов и поэтому нельзя их все выписать.

470 Найдите пятый член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 4^n$.

471 Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = 7n + 1$. Является ли членом данной последовательности число: а) 36; б) 41?
Если число является членом последовательности, найдите его номер.

472 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 3a_n + 1$. Является ли число 123456789 членом этой последовательности?

473 Последовательность (a_n) задана формулой общего члена: $a_n = (-3)^n$. Задайте последовательность (a_n) рекуррентно.

474 В банке взят кредит в размере 12 000 рублей на срок 1 год. Возврат кредита осуществляется ежемесячно равными долями. Помимо этого осуществляются дополнительные выплаты – начиная со второго месяца кредитор ежемесячно выплачивает процент по кредиту – 4% от суммы его задолженности.
Задайте последовательность, которую образуют суммы ежемесячных выплат, начиная со второго месяца погашения кредита, формулой общего члена. Выпишите все ее члены. Сколько «переплатит» кредитор банку за пользование этим кредитом?

П **475** 1) Сократите дробь:

а) $\dfrac{9y^2 - x^2}{x^2 - 3xy}$; б) $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 3x}$.

2) Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\dfrac{x}{x + 2}$ и $\dfrac{x - 1}{x - 2}$; б) $\dfrac{a}{12a^2 - 12b^2}$ и $\dfrac{b}{18a^3 - 18a^2b}$.

3) Какое свойство позволило выполнить эти преобразования?

476 Упростите выражение: $\dfrac{3}{2x^2 + 2x} + \dfrac{2x - 1}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x}$.

477 Выполните действия:

а) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{18x^3} \cdot \dfrac{9x^4}{x^2 - 1}$; б) $\dfrac{a^3 - 2a^2}{3a + 3} : \dfrac{a^2 - 4}{9a^2 + 18a + 9}$.

478 Упростите:

а) $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + x - 6} : \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x + 6} - 1$;

б) $\left(\dfrac{2a}{2a + b} - \dfrac{4a^2}{4a^2 + 4b + b^2}\right) \cdot \dfrac{1}{\dfrac{2a}{4a^2 - b^2} + \dfrac{1}{b - 2a}} + \dfrac{8a^2}{2a + b}$.

Д **479** Найдите четыре первых члена последовательности (a_n), заданной формулой:

а) $a_n = 3n + 1$; б) $a_n = \dfrac{5^n}{(n + 1)^2}$.

480 Найдите седьмой член последовательности, если:

а) последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$;

б) последовательность (b_n) задана формулой общего члена: $b_n = 3 \cdot (-2)^n$.

481 Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = 7n + 1$. Является ли членом данной последовательности число 106? Если число является членом последовательности, найдите его номер.

482 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n^{\,2} + 1$. Является ли число 1 000 000 000 000 членом этой последовательности.

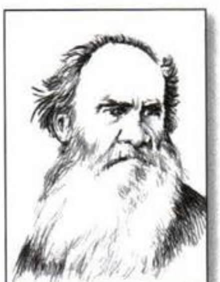
483 Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = 2a_n$. Задайте последовательность (a_n) формулой общего члена.

484 Упростите:

$$\frac{3-x^2}{x^2-1}+\frac{3x}{x^2-1}:\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}.$$

C **485*** Обозначим через $\Pi(x)$ произведение цифр натурального числа x. В ряд выписаны числа $\Pi(2013)$, $\Pi(2014)$, $\Pi(2015)$, ... Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, может оказаться последовательными натуральными числами?

2.* Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность



Знание смиряет великого, удивляет обыкновенного и раздувает маленького человека.

Лев Николаевич Толстой (1828–1910),
великий русский писатель, просветитель, публицист

В предыдущем пункте мы познакомились с одним из основных понятий математики – последовательность. В этом пункте мы познакомимся со свойствами последовательностей.

Мы выяснили, что бесконечные числовые последовательности являются важным, а потому выделяемым особо, частным случаем функций. В этом пункте мы познакомимся со свойствами последовательностей, опираясь на уже известные нам свойства функций. Мы знаем, что функции бывают возрастающие и убывающие.

Сравним две последовательности: 1; 2; 3; 4; ... и – 1; – 2; – 3; – 4;... . Каждый член первой последовательности больше предыдущего – с увеличением номера члены последовательности увеличиваются; каждый член второй последовательности меньше предыдущего – с увеличением номера члены последовательности уменьшаются. Введем соответствующее определение.

Определение 1. Последовательность x_n называется **строго возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n$ при всех $n = 1, 2,...$. Последовательность x_n называется **строго убывающей**, если $x_{n+1} < x_n$ при всех $n = 1, 2,...$.

В этом определении употреблялись строгие неравенства: $x_{n+1} > x_n$ или $x_{n+1} < x_n$. Для последовательностей можно ввести также понятие нестрогого возрастания и убывания.

Определение 2. Последовательность x_n называется **нестрого возрастающей**, если $x_{n+1} \geqslant x_n$ при всех $n = 1, 2,...$. Последовательность x_n называется **нестрого убывающей**, если $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех $n = 1, 2,...$.

Отметим, что для функций можно сформулировать определение, аналогичное определению 2, но в отличие от последовательностей эти понятия для функций используются гораздо реже.

Определение 3. Все строго или нестрого возрастающие, а также строго или нестрого убывающие последовательности называются **монотонными.**

Легко видеть, что уже известная нам последовательность Фибоначчи монотонная – она нестрого возрастает, так как для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_{n+1} \geqslant x_n$, но $x_2 = x_1$, поэтому строгого возрастания нет (неравенство $x_{n+1} > x_n$ не выполняется при $n = 1$). А вот последовательность (a_n) из примера 1 предыдущего пункта не является монотонной (знак неравенства между x_{n+1} и x_n меняется без какой-либо закономерности).

Иногда имеет смысл исследовать монотонность последовательности не для всех номеров $n = 1, 2, \ldots$, а начиная с некоторого номера.

Определение 4. Последовательность x_n называется **строго возрастающей начиная с номера n_0**, если неравенство $x_{n+1} > x_n$ выполняется для всех номеров $n \geqslant n_0$. (Строгое убывание и нестрогое возрастание и убывание последовательности начиная с номера n_0 определяются аналогично.)

Последовательность Фибоначчи строго возрастает начиная с номера 2 (т.е. при $n \geqslant 2$), так как $x_{n+1} > x_n$ при $n \geqslant 2$.

Пример 1.

Исследуйте на монотонность последовательности, то есть выясните строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$; в) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Решение.

а) Для исследования монотонности последовательности часто бывает удобно рассмотреть знак разности $x_{n+1} - x_n$. Так как $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то $x_{n+1} > x_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность (x_n) строго возрастает. Можно заметить также, что $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; так как при возрастании n величина $n+1$ строго возрастает, то $\dfrac{1}{n+1}$ строго убывает. Так как из постоянной величины 1 вычитается строго убывающая последовательность, то в итоге x_n строго возрастает.

б) Если все члены последовательности положительны, то для исследования монотонности часто бывает удобно рассмотреть отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ и сравнить его с единицей. Имеем: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} = \dfrac{10}{n+1}$. При больших n отношение становится меньше 1, а именно, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ при $10 < n + 1$, т.е. при $n > 9$. Итак, $x_{n+1} < x_n$ при $n \geqslant 10$; $x_{n+1} = x_n$ при $n = 9$ и $x_{n+1} > x_n$ при $n \leqslant 8$. Поэтому последовательность (x_n) строго убывает при $n \geqslant 10$ и нестрого убывает при $n \geqslant 9$. Если рассматривать последовательные значения x_n, то

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_8 < x_9,\ x_9 = x_{10},\ \text{а затем}\ x_{10} > x_{11} > x_{12} > \ldots.$$

Отсюда видно, что члены последовательности x_9 и x_{10}, равные $\dfrac{10^9}{9!} = \dfrac{10^{10}}{10!}$, являются наибольшими ее членами (все остальные члены положительны и принимают значения, меньшие $\dfrac{10^9}{9!}$).

в) Чтобы оценить, как изменяются члены последовательности при увеличении n, преобразуем формулу общего члена. Домножим и разделим $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ на $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, тогда $x_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \dfrac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$. При возрастании n величины $\sqrt{n+1}$ и $\sqrt{n}$ строго возрастают, значит, строго возрастает знаменатель $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Так как числитель – постоянная положительная величина, то дробь строго убывает. ■

Чтобы исследовать последовательность на монотонность, можно:
- рассмотреть знак разности $x_{n+1} - x_n$
- или рассмотреть отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$,
- или преобразовать формулу общего члена.

После чего сделать вывод, воспользовавшись следующей таблицей:

(x_n) строго [нестрого] возрастает, если	(x_n) строго [нестрого] убывает, если
$x_{n+1} - x_n > 0$ $[x_{n+1} - x_n \geqslant 0]$	$x_{n+1} - x_n < 0$ $[x_{n+1} - x_n \leqslant 0]$
при положительных членах последовательности: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ $[\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1]$	при положительных членах последовательности: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ $[\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant 1]$
при увеличении n величина x_n строго [нестрого] увеличивается	при увеличении n величина x_n строго [нестрого] уменьшается

Вернемся к последовательности (a_n), составленной из цифр числа $\sqrt{2}$ (мы рассматривали ее в примере 1 предыдущего пункта). Заметим, что все ее члены не превышают по модулю девяти (ведь все ее члены – это *цифры* числа), то есть выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 9$. Такие последовательности называют ограниченными.

Определение 5. Последовательность (x_n) называется **ограниченной**, если для всех номеров $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$, где C – некоторое положительное число. Если последовательность не является ограниченной, ее соответственно называют **неограниченной**.

Применим это определение для доказательства ограниченности последовательностей, уже рассмотренных нами в примере 1.

Пример 2.

Доказать, что последовательности являются ограниченными:

а) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; б) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$; в) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Доказательство.

а) Так как при всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $n < n + 1$, то $0 < x_n < 1$. Поэтому $|x_n| \leqslant 1$ для всех номеров n и по определению последовательность ограниченная. ■

б) В ходе решения примера 1б было доказано, что наибольшее значение x_n равно $\dfrac{10^9}{9!} = C$. Так как при всех $n = 1, 2, ...$ значения x_n положительны, то $|x_n| \leqslant C$, $n = 1, 2, ...$, и по определению последовательность ограниченная. ■

в) Так как $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, то при всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. Так как все значения x_n положительны, то $|x_n| \leqslant \sqrt{2} - 1$ при всех $n = 1, 2, ...$, и по определению последовательность ограниченная. ■

Пример 3.

Доказать ограниченность последовательности

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, ...$

Доказательство.

При всех $k = 2, 3, ...$ выполняется неравенство $k^2 > k(k-1)$, поэтому $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Значит, $x_n < 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ при всех $n = 2, 3, ...$; при $n = 1$ также $x_1 = 1 < 2$. Так как все значения x_n положительны, то $|x_n| \leqslant 2$ при всех $n = 1, 2, ...$. ■

Заметим, что величина C в определении ограниченной последовательности задается неоднозначно; если при всех n выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 2$, то и подавно $|x_n| \leqslant 3$ и т.д. Вопрос об определении *наименьшего* возможного значения C выходит за рамки нашего курса. Отметим только, что такое наименьшее возможное значение C в примере 2а равно 1, в примере 2б равно $\dfrac{10^9}{9!}$, в примере 2в равно $\sqrt{2} - 1$, а в примере 3 равно $\dfrac{\pi^2}{6}$ (вот это уже никак нельзя было бы угадать!).

Пример 4.

Доказать неограниченность последовательности квадратов натуральных чисел.

Доказательство (методом от противного).

Пусть последовательность $x_n = n^2$ ограничена, т.е. для всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$, то есть $n^2 \leqslant C$, тогда $n \leqslant \sqrt{C}$. Но это заведомо неверно, так как для фиксированного положительного числа $\sqrt{C}$ найдется натуральное число $n > \sqrt{C}$. Полученное противоречие показывает, что последовательность неограничена.

* * *

В заключение отметим, что ограниченная последовательность может иметь наибольший и наименьший члены, а может и не иметь.

Пример 5.

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ из примера 1а. Мы видим, что она строго возрастает и ограничена, так как при всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 1$. Так как $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$, то наименьший член последовательности равен $x_1 = \frac{1}{2}$. Далее, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = \frac{4}{5}$, и т.д.; $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Мы видим, что все члены x_n строго меньше, чем 1, но значение 1 ни один из членов не принимает.

Ясно, что если последовательность x_n строго возрастает, то она не имеет наибольшего члена, ведь за каждым ее членом следует еще больший по значению член. Итак, эта последовательность не имеет наибольшего члена, хотя и ограничена.

К **486** Докажите неравенства:

а) $a^2 + 9b^2 \geqslant 6ab$; б) $\frac{(a-b)^2}{2} \leqslant a^2 + b^2$.

487 Постройте графики функций:

а) $y = -2x + 3$; б) $y = 3x - 1$.

Какая из них является убывающей функцией? возрастающей функцией?

488 Даны две последовательности чисел a_n: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ и b_n: $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \ldots$.

1) Как изменяются члены каждой из последовательностей? Чем отличаются эти последовательности?

2) Как бы вы назвали каждую из последовательностей. Сравните свое предположение с учебником на стр. 127.

489 Дана последовательность $a_n = 9n - 10$.

1) Определите, какой является данная последовательность – убывающей или возрастающей.

2) Какой способ вы использовали, чтобы выполнить предыдущее задание?

3) Запишите a_{n+1} член данной последовательности и найдите разность

$a_{n+1} - a_n$.

4) Сравните разность с нулем.

5) Сравните результаты выполнения заданий (1) и (4). Сделайте вывод.

6) Предложите способ определения монотонности последовательности. Сравните его со способом, изложенным в учебнике на стр. 129. Какие еще способы исследования последовательности на монотонность можно использовать?

490 Исследуйте на монотонность последовательность, то есть выясните, строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$; б) $x_n = \frac{n!}{2^n}$; в) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$.

491 Какие последовательности из предыдущего задания являются ограниченными?

492* Дана последовательность (a_n), заданная рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$. Докажите, что эта последовательность монотонна и ограничена.

П **493** Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = 3 + \frac{1}{3}n$. Найдите:

а) c_1; б) c_9; в) c_{16}; г) c_{150}; д) c_{k+3}.

494 Сократите дробь, выполнив деление многочленов в столбик:

а) $\frac{x^3 + 4x^2 - 33x + 4}{x^2 + 8x - 1}$; б) $\frac{2x^4 - 22x^3 + x^2 - 17x + 66}{x - 11}$.

Д **495** Исследуйте на монотонность последовательность, то есть выясните, строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n = \frac{2n^2 + 4n + 4}{(n+1)^2}$; б) $x_n = \frac{(2n)!}{12^n}$; в) $x_n = \frac{1}{n - \sqrt{(n-1)(n+1)}}$.

496 Какие последовательности из предыдущего задания являются ограниченными?

497 Сократите дробь: $\dfrac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x + 15}{x^2 - x + 5}$.

С **498*** Докажите неограниченность последовательности $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

499* При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{1{,}001^n}$ достигает максимального значения?

§ 2. Арифметическая прогрессия

1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена

Знания, не рожденные опытом, матерью всякой достоверности, бесплодны и полны ошибок.

Леонардо да Винчи (1452–1519),
итальянский художник, ученый и изобретатель

Мы начали изучать числовые последовательности и их свойства, так как они помогают решать практические задачи. В этом пункте мы познакомимся с особым видом последовательностей, часто возникающих на практике. Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

На складе фабрики имеется 100 готовых костюмов. За день фабрика шьет 35 новых костюмов. Сколько костюмов будет на складе через один день, два дня, три дня и т.д., пока не состоится продажа со склада?

Решение.

Найдем количество костюмов на складе через один день: $100 + 35 = 135$.

Так как мы не знаем, когда состоится первая продажа со склада и состоится ли она вообще, рассмотрим последовательность $x_1, x_2, \ldots$, в которой k-й член равен количеству готовых костюмов на конец k-го рабочего дня, то есть

$x_1 = 135;$

$x_2 = 135 + 35 = 170;$

$x_3 = 170 + 35 = 205;$

...

Получим следующую последовательность: 135; 170; 205; 240;... .

В полученной последовательности каждый следующий член получается из предыдущего увеличением на одно и то же число, равное 35.

Приведем другой пример, показывающий появление последовательности такого типа. В жизни, стремясь сохранить имеющийся капитал или даже приумножить его, люди вкладывают деньги в банк. Получая возможность использовать вложенные средства, банк через определенные промежутки времени увеличивает вклады на счетах, «начисляет на них проценты». Как нам известно из курса 6 класса, наиболее простой формой увеличения вкладов является начисление «простых процентов», когда один раз за определенный период (раз в год, в полгода, в месяц) сумма вклада увеличивается *на одну и ту же фиксированную величину*, пропорциональную *начальному* вкладу. Возникающая при этом числовая последовательность, образуемая величинами вклада в начальный момент, в конце первого периода, в конце второго периода, и т.д., является примером последовательности, в которой также каждый следующий член превосходит предыдущий на одно и то же число.

Подобные последовательности получили специальное название – арифметическая прогрессия (от лат. *progression* – движение вперед). Займемся их более подробным изучением. Но сначала введем определение.

Определение 1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена прибавлением одного и того же числа d, называется **арифметической прогрессией**. Число d называется **разностью** (или шагом) арифметической прогрессии.

Опираясь на введенные нами обозначения, можно описать правило составления арифметической прогрессии на математическом языке: $x_{n+1} = x_n + d$ (получили рекуррентную формулу для задания арифметической прогрессии).

Отсюда $d = x_{n+1} - x_n$, теперь ясно, почему это число называют *разностью*.

Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным и даже нулем. Так, в рассмотренной нами задаче про костюмы разность арифметической прогрессии положительна $d = 35$. В этой последовательности каждый следующий член больше предыдущего – она строго *возрастает*.

Приведем пример арифметической последовательности с отрицательной разностью: 130; 100; 70; 40; .... Здесь разность отрицательна $d = -30$. В этой последовательности каждый следующий член меньше предыдущего – она строго *убывает*.

При $d = 0$ арифметическая прогрессия является *постоянной* последовательностью ($x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$).

* * *

Покажем, что арифметическая прогрессия с положительной разностью – строго возрастающая последовательность. Так как $x_{n+1} - x_n = d > 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, значит, $x_{n+1} > x_n$. Аналогично арифметическая прогрессия с отрицательной разностью – строго убывающая (так как $x_{n+1} - x_n = d < 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$). Если $d = 0$, то все члены арифметической прогрессии равны x_1, т.е. последовательность постоянна (строго говоря, такая последовательность является одновременно нестрого возрастающей и нестрого убывающей). При $d \neq 0$ арифметическая прогрессия является неограниченной последовательностью, при $d = 0$ – ограниченной.

Вернемся к задаче 1. Пусть в этой задаче нам требуется найти, сколько костюмов будет на складе через 30 дней. Выписывать по очереди члены прогрессии, пока не дойдем до 30-го ее члена – не самый рациональный способ ответа на этот вопрос. Проведем другие рассуждения.

Если $x_1 = 135$;

$x_2 = 135 + 35$;

$x_3 = 135 + 35 + 35 = 135 + 35 \cdot 2$,

$x_4 = 135 + 35 + 35 + 35 = 135 + 35 \cdot 3$,

тогда нетрудно понять, что $x_{30} = 135 + 35 \cdot 29 = 1150$.

Вообще говоря, если первый член арифметической прогрессии равен x_1, а разность равна d, то $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + 2d$, $x_4 = x_3 + d = x_1 + 3d$ и т.д. Легко заметить, что $x_n = x_1 + d(n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Мы получили **формулу общего члена арифметической прогрессии:**

$$\boxed{x_n = x_1 + d(n-1).}$$

* * *

Строго эта формула обосновывается методом математической индукции.

Доказательство.

При $n = 1$ получим: $x_1 + d \cdot 0 = x_1$; формула справедлива.

Пусть при фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ выполняется равенство $x_n = x_1 + d(n-1)$.

Тогда $x_{n+1} = x_n + d$ и по предположению индукции: $x_{n+1} = x_1 + d(n-1) + d$. Вынося множитель d за скобки, получим $x_{n+1} = x_1 + d((n+1)-1)$. ■

Отметим, что по формуле общего члена последовательности можно сразу определить, является ли последовательность арифметической прогрессией. Для этого нужно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Последовательность x_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $x_n = kn + b$, где $k, b \in \boldsymbol{R}$; при этом разность прогрессии равна k (таким образом, арифметические прогрессии – это линейные функции на множестве натуральных чисел).

Доказательство.

1. Если (x_n) – арифметическая прогрессия, то $x_n = x_1 + d(n-1) = dn + x_1 - d$. Переобозначив $d = k$ и $x_1 - d = b$, получим $x_n = kn + b$.

2. Обратно, если общий член последовательности (x_n) задан формулой $x_n = kn + b$, то $x_{n+1} - x_n = k(n+1) + b - kn - b = k$, $n = 1, 2, \ldots$, то есть (x_n) – арифметическая прогрессия с разностью k. ■

Пример 1.

Запишите формулу общего члена для данных арифметических прогрессий и вычислите 100-й ее член:

а) последовательность всех четных натуральных чисел;

б) последовательность всех натуральных чисел, дающих при делении на 3 остаток 1;

в) последовательность всех нечетных отрицательных чисел: $-1; -3; -5, \ldots$.

Решение.

а) Первый член прогрессии равен 2. Каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением числа 2, значит, $d = 2$. По формуле общего члена прогрессии: $x_n = 2 + 2(n-1) = 2n$. Отсюда $x_{100} = 2 \cdot 100 = 200$.

б) В данной прогрессии $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, и т.д. Каждый последующий член получается из предыдущего прибавлением числа 3. Поэтому это – арифметическая прогрессия с разностью 3, и $x_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Отсюда $x_{100} = 3 \cdot 100 - 2 = 298$.

в) В данной прогрессии $x_1 = -1$, а каждый последующий член получается из предыдущего вычитанием числа 2, значит, $d = -2$. Тогда формула общего члена этой прогрессии $x_n = -1 - 2(n-1) = -2n + 1$. Отсюда $x_{100} = -2 \cdot 100 + 1 = -199$.

Пример 2.

Задана арифметическая прогрессия, первый член которой равен 0, а разность составляет 3,5. Является ли членом этой прогрессии число 210; число 73?

Решение.

1) Если 210 является членом этой прогрессии, то для него верна формула $x_n = x_1 + d(n-1)$ и выполняется равенство:

$210 = 0 + 3{,}5(n-1)$, где n – номер этого члена прогрессии.

$210 = 3{,}5(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 210 : 3{,}5 \Leftrightarrow n-1 = 60 \Leftrightarrow n = 61$.

Значит, 210 является членом этой прогрессии (причем ее 61-ым членом).

2) Аналогично, составим равенство

$73 = 3{,}5(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 73 : 3{,}5 \Leftrightarrow n-1 = 20\frac{6}{7} \Leftrightarrow n = 21\frac{6}{7}$.

Значит, 73 не является членом этой прогрессии (так как номер должен быть натуральным числом).

Ответ: число 210 является членом этой прогрессии; число 73 – нет.

Пример 3.

Сумма внутренних углов треугольника равно 180°, а при увеличении числа вершин выпуклого многоугольника на 1 сумма внутренних углов его увеличивается на 180°. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого 2013–угольника?

Решение.

Рассмотрим арифметическую прогрессию x_n такую, что ее первый член $x_1 = 180$ является выраженной в градусах суммой внутренних углов треугольника, второй член x_2 – суммой внутренних углов выпуклого четырехугольника, третий член x_3 – суммой внутренних углов выпуклого пятиугольника и т.д.

Разность прогрессии $d = 180$. Тогда n-й член x_n – это сумма внутренних углов выпуклого $(n+2)$–угольника; $x_n = 180 + 180(n-1) = 180n$. Тогда сумма внутренних углов выпуклого $(n+2)$–угольника равна $180n°$, а для n–угольника получим $180(n-2)°$. Сумма внутренних углов выпуклого 2013–угольника равна $180 \cdot 2011° = 361\,980°$.

Ответ: 361 980°.

В заключение докажем еще несколько свойств членов арифметической последовательности. Сначала докажем свойство прогрессии, благодаря которому ее принято называть *арифметической.*

Теорема. Последовательность x_n является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, т.е. $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Доказательство.

Если x_n – арифметическая прогрессия, то $x_{n+1} = x_n + d$, $x_{n-1} = x_n - d$, откуда $\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{x_n - d + x_n + d}{2} = x_n$.

Обратно, если $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$ при $n = 2, 3, 4, \ldots$, то $2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$, откуда $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Таким образом, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \ldots = x_{n+1} - x_n = \ldots$, т.е. разность между двумя соседними членами последовательности – постоянная величина. Значит, x_n – арифметическая прогрессия. ■

* * *

Докажем еще одно свойство, рассмотрев следующий пример.

Пример 4.

Пусть все члены $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и разность d арифметической прогрессии отличны от нуля.

Доказать, что $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_nx_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$.

Доказательство.

При любом $k = 1, 2, \ldots$ разность $x_{k+1}-x_k$ равна d, поэтому

$\frac{1}{x_kx_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_k}{dx_kx_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right)$. Значит, $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{x_nx_{n+1}}=$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$. ■

К **500** При вкладе в банк начальная сумма 800 р. увеличивается ежегодно на 10% от начальной суммы. Какой будет эта сумма через: 1 год; 2 года; 3 года?

501 Объясните, как образованы члены последовательностей:

а) 5; 7; 9; 11 ….

б) −100; −150; −200; −250; −300; ….

в) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; ….

Придумайте пример аналогичной последовательности. Познакомьтесь с названием подобных последовательностей в учебнике. Какое определение вы использовали? Укажите разность каждой из данных прогрессий.

502 Найдите четыре первых члена арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1,5, а разность равна −0,4.

503 Дан первый член арифметической прогрессия $a_1 = 500$ и ее разность $d = 20$.

1) Проанализируйте, каким образом записаны члены прогрессии, и продолжите запись:

$a_2 = 500 + 20$
$a_3 = 500 + 20 + 20 = 500 + 20 \cdot 2$
$a_4 =$
$a_5 =$
…

Что интересного вы наблюдаете? Какой вид будет иметь a_n ?

2) Можно ли обобщить ваши наблюдения для любой арифметической прогрессии? Как найти общий член прогрессии, используя первый член и разность прогрессии. Сравните свою формулу с формулой на стр. 134.

504 В арифметической прогрессии (a_n) первый член $a_1 = 5$; разность $d = 0,6$. Найдите: а) a_5; б) a_{26}; в) a_{32}.

505 Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Выразите:

а) a_8 через a_1 и d; б) a_{14} через a_5 и d.

506 Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если:

а) $x_1 = 14$; $x_8 = -7$; б) $x_5 = -4$; $x_{14} = 50$.

507 Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если:

а) $y_{12} = -23$; $d = -2$; б) $y_6 = 16$; $y_{18} = 52$.

508 Найдите разность и сто пятидесятый член арифметической прогрессии 1,8; 2,2; 2,6; ….

509 Какие из чисел 123, 132, 213, 231, 312, 321 являются членами арифметической прогрессии 3; 7; 11; ... ?

510 Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии:

а) 18; 14; 10; 6; ...; б) $2\frac{1}{6}$; $2\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{2}{3}$; ... .

511 Пятый член арифметической прогрессии равен 1, а двенадцатый равен 15. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите ее седьмой член.

512 Укажите количество положительных членов арифметической прогрессии: 84,1; 78,3; 72,5 ....

513 В арифметической прогрессии $x_7 = 3$. При каком значении разности прогрессии величина произведения $x_4 \cdot x_8$ наибольшая?

514 Найдите разность арифметической прогрессии, если a_6 составляет 60% от a_3 и $a_6 + a_3 = 48$.

515 Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными) числа: 2, 10, $5\sqrt{2}$?

516 Найдите пятый член арифметической прогрессии, если $a_3 + a_7 = 21$.

517 Третий член арифметической прогрессии равен 20, а девятый равен 2. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите ее пятый член.

518 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_4 + a_8 = 35$ и $a_3 + a_{21} = 65$; б) $a_5 + a_9 = 42$ и $a_3 \cdot a_{10} = 165$.

519 Является ли последовательность, заданная формулой, арифметической прогрессией:

а) $a_n = -8n - 1$; в) $a_n = -4{,}4n$;

б) $a_n = 5n^2 - 4n$; г) $a_n = 25 - 0{,}16n$.

П **520** Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = n(n - 4)$. Найдите b_1; b_4; b_{10}; b_k; b_{k+2}.

521 1) Какие из данных последовательностей строго убывающие, а какие строго возрастающие?

а) $a_n = 3n - 2$; в) $a_n = \frac{1}{n+1}$; д) 3, 6, 9, ..., $3k$, ...; ж) $a_n = 3 + n^2$;

б) $a_n = 50 + 7n$; г) $a_n = 2n - 1$; е) $a_n = \frac{1}{n}$; з) $a_n = 1 + \frac{n}{5}$.

2) Какие из этих последовательностей будут являться арифметическими прогрессиями?

522 Решите уравнения:

а) $\frac{3}{x} + \frac{33}{x^2 - 11x} = \frac{4 - x}{11 - x}$; б) $\frac{x}{x - 2} = \frac{7}{x + 2} - \frac{8}{4 - x^2}$; в) $\frac{x + 1}{x + 3} + \frac{10x}{x^2 + x - 6} = \frac{4}{x - 2}$.

523 Решите уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $\dfrac{1}{x - \frac{6}{x} - 3} - \dfrac{1}{x - \frac{6}{x} + 2} = \dfrac{5}{24}$; б) $\frac{4x - 1}{x + 5} = 5 + \frac{6}{x + 5}$.

Д **524** Известны первый член арифметической прогрессии (c_n) и ее разность: $c_1 = 1{,}5$; $d = -0{,}25$. Найдите c_5; c_{23}; c_{k+4}.

525 Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 3$ и $a_{25} = 53$.

526 Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия -20; $-19{,}2$; $-18{,}4$; ...?

527 В арифметической прогрессии $a_4 = 117$, $a_5 = 114$. Найдите номер первого отрицательного члена прогрессии.

528 Найдите наиболее близкий к нулю член арифметической прогрессии: 101,1; 97,2; 93,3; ....

529* Могут ли быть членами одной арифметической прогрессии (не обязательно последовательными) числа: $\sqrt{3}$, 5, $7\sqrt{3}$?

530 Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = n(n-3)$. Найдите a_1; a_3; a_{10}; a_k; a_{k+3}.

531 Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{8}{x^2-16} = \dfrac{x-5}{x-4}$; б) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{10}{5x-x^2} = \dfrac{3-x}{x-5}$;

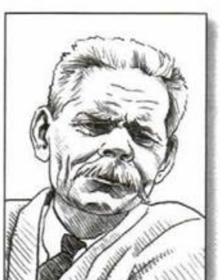
С **532*** Возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение каждых двух различных ее членов – также член этой прогрессии. Докажите, что все ее члены – целые числа.

533* Какое наибольшее количество последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 6 может оказаться простыми числами?

534* Имеется возрастающая арифметическая прогрессия с натуральными членами. Докажите, что найдется член, в десятичной записи которого есть 999 девяток подряд.

535* Возрастающая арифметическая прогрессия содержит два натуральных числа и квадрат меньшего из них. Докажите, что она содержит и квадрат второго числа.

2. Сумма первых n членов арифметической прогрессии



Доказывать человеку необходимость знания –
это все равно, что убеждать его в полезности зрения.

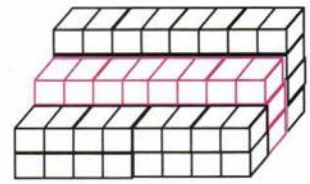
Максим Горький (1868–1936),
русский советский писатель

В предыдущем пункте мы рассмотрели несколько формул, связанных с арифметической прогрессией. Среди них была и формула общего члена арифметической прогрессии, которая помогает, например, найти нужный ее член, избежав громоздких вычислений. В этом пункте мы выявим и другие формулы, позволяющие проводить расчеты с членами прогрессий более рациональным способом.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

Рабочий выкладывает из кирпича ступени лестницы. На каждую следующую ступеньку уходит на 8 кирпичей больше, чем на предыдущую (кладка начинается от уровня земли). На первую ступеньку ушло 16 кирпичей. Сколько кирпичей потребуется на выкладывание лестницы с 15 ступенями?



В этом примере, если x_1, x_2, ... – соответственно количество кирпичей, требуемых для выкладывания первой, второй и т.д. ступеней, то числа x_1, x_2, ... являются членами арифметической прогрессии с первым членом, равным 16, и разностью 8. Для ответа на вопрос нам требуется найти сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии: $x_1 + x_2 + ... + x_{15}$.

Другой пример задачи на суммирование членов арифметической прогрессии описан в математической литературе.

В школьные годы с великим немецким математиком Карлом Гауссом произошел такой случай (возможно, это легенда). Учителю нужно было на уроке срочно заняться своими делами, и он озадачил учеников таким, с его точки зрения, трудным упражнением: найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Учитель полагал, что на его выполнение уйдет много времени, однако Гаусс справился с этим упражнением за пару минут. По всей видимости, он рассуждал так: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 50 + 51 = 101$. Поэтому он разбил 100 слагаемых на 50 пар, сумма чисел в каждой из которых составляла 101. Отсюда ему нетрудно было сделать вывод о том, что вся сумма равна $50 \cdot 101 = 5050$.

Итак, юный Гаусс, заметив определенную закономерность, вычислил сумму первых ста слагаемых арифметической прогрессии, обойдясь без поочередного прибавления каждого из слагаемых. Попробуем найти подобный способ нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии и мы.

Получить значение суммы Гауссу помогло то, что он заметил равенство попарных сумм, равноудаленных от начала x_1 и конца x_n арифметической прогрессии. Воспользуемся его идеей и решим задачу нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии в общем виде.

Обозначим сумму первых n членов арифметической прогрессии S_n. Чтобы получить попарные суммы членов прогрессии, запишем S_n двумя способами. В первой строке начнем с x_1 и будем получать каждый следующий член прибавлением разности d. Во второй строке начнем с x_n и будем получать каждый следующий член вычитанием разности d.

$$S_n = x_1 + (x_1 + d) + (x_1 + 2d) ... + (x_1 + (n-1)\,d).$$
$$S_n = x_n + (x_n - d) + (x_n - 2d) ... + (x_n - (n-1)\,d).$$

Как мы видим, каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме дает одно и то же значение $x_1 + x_n$ (а значит, попарные суммы членов S_n арифметической прогрессии, равноудаленных от ее начала x_1 и конца x_n, всегда равны).

Сложив эти равенства почленно, получим:

$$2S_n = \underbrace{(x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + ... + (x_1 + x_n)}_{n \text{ раз}}$$

$$2S_n = (x_1 + x_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}. \blacksquare$$

Используем полученную формулу для задачи, решенной юным Гауссом. Натуральный ряд чисел образует арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, а n-й член равен n, поэтому $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. При $n = 100$ получим тот же результат: $1 + 2 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Полученная нами формула удобна, если нам известен первый и n–й член прогрессии, как это было в истории про Гаусса. Однако в первой задаче, рассмотренной нами, 15-ый член прогрессии неизвестен и его придется вычислять отдельно по формуле $x_{15} = x_1 + (15 - 1)d$. Выведем формулу суммы, которая сразу приведет нас к нужному ответу.

Подставив в формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии вместо x_n выражение $x_1 + (n-1)d$, получим другую формулу для подсчета суммы:

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n = \frac{x_1 + x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Эта формула внешне напоминает формулу общего члена арифметической прогрессии, и поэтому ее легко запомнить.

Итак, мы можем использовать две **формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии**

$$\boxed{S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}, n = 1; 2; 3; ...}$$

и

$$\boxed{S_n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n = 1; 2; 3; ...}$$

Вернемся к решению задачи о кирпичной кладке.

$$S_{15} = \frac{2 \cdot 16 + 8 \cdot (15 - 1)}{2} \cdot 15 = (16 + 56) \cdot 15 = 1080.$$

Ответ: 1080 кирпичей.

Не зная этих формул, нам бы пришлось вычислять все первых пятнадцать членов арифметической прогрессии и складывать их.

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых применяются выведенные нами формулы.

Пример 1.

Найти сумму первых n нечетных чисел.

Решение.

Последовательность нечетных натуральных чисел образует арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n-м членом, равным $2n - 1$. Тогда искомая сумма равна

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

Пример 2.

13 шахматистов разыгрывают турнир в один круг, т.е. каждые два участника встречаются друг с другом по одному разу. Сколько партий будет сыграно?

Решение.

Первый участник сыграет 12 партий, второй – также 12, но одна игра (с первым) уже учтена, поэтому «новых» (не учтенных ранее) партий будет 11. «Неучтенных» партий 3-го участника будет 10, 4-го – 9, и т.д. Для 12-го участника останется одна «неучтенная» партия с 13-м, а для 13-го все партии уже учтены. Итого сыграно $1 + 2 + + ... + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ партий.

Замечание. Эту же задачу можно решить и с помощью комбинаторики. Искомое число партий равно $C_{13}^2 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$.

Пример 3.

Найти разность арифметической прогрессии, если сумма ее второго и третьего членов равна 13, а сумма третьего и четвертого членов равна 7.

Решение.

Разность $(x_3 + x_4) - (x_2 + x_3) = x_4 - x_2 = 2d$, где d – разность прогрессии. То есть $2d = 7 - 13 = -6$, откуда $d = -3$.

Пример 4.

Найти сумму первых 11 членов арифметической прогрессии, если сумма 3-го и 9-го членов равна 10.

Решение.

Пусть x_1 – первый член, а d – разность прогрессии. Тогда $x_3 = x_1 + 2d$, $x_9 = x_1 + 8d$, $x_3 + x_9 = 2x_1 + 10d = 10$. Сумма первых 11 членов прогрессии равна

$$S_{11} = \frac{x_1 + x_{11}}{2} = \frac{11}{2}(x_1 + x_1 + 10d) = \frac{11}{2}(2x_1 + 10d) = \frac{11}{2} \cdot 10 = 55.$$

Пример 5.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии в два раза меньше суммы следующих n членов. Найти отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме первых n членов (считать, что разность прогрессии не равна 0).

Решение.

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n; \ S_{3n} = \frac{x_1 + x_{3n}}{2} \cdot 3n, \text{ поэтому } \frac{S_{3n}}{S_n} = 3 \cdot \frac{x_1 + x_{3n}}{x_1 + x_n}. \qquad (1)$$

По условию задачи, $x_{n+1} + ... + x_{2n} = 2S_n$, но $x_{n+1}, ..., x_{2n}$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом x_{n+1} и n-м членом x_{2n}, поэтому $x_{n+1} + ... + x_{2n} = \frac{x_{n+1} + x_{2n}}{2} \cdot n$, т.е. $\frac{x_{n+1} + x_{2n}}{2} \cdot n = 2 \cdot \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$, откуда

$$x_{n+1} + x_{2n} = 2(x_1 + x_n). \qquad (2)$$

Так как $x_1 + x_{3n} = x_{n+1} + x_{2n}$ (суммы членов, равноудаленных от «начала» x_1 и «конца» x_{3n}, равны), поэтому из (1) и (2) следует $\frac{S_{3n}}{S_n} = 3 \cdot \frac{x_{n+1} + x_{2n}}{x_1 + x_n} = 6$.

* * *

Пример 6*. Найти сумму квадратов первых n натуральных чисел.

Решение.

Применяя равенство $(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, $k = 1, 2, ...$, получим:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1;$$
$$...$$
$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Складывая эти равенства, получим:

$2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + ... + n) + n.$

В левой и правой частях последнего равенства имеются суммы общих слагаемых $2^3 + 3^3 + ... + n^3$; «уничтожив» их, получим $(n+1)^3 = 1 + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + ... + n) + n$.

Так как $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, то искомая сумма равна

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n+1}{3}\left((n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right) =$$

$$= \frac{n+1}{6}(2(n+1)^2 - 2 - 3n) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n) = \frac{n+1}{6}(2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Этот же результат был ранее выведен нами при помощи принципа математической индукции.

Аналогично можно, зная выражения для $1 + 2 + ... + n$ и $1^2 + 2^2 + ... + n^2$, найти $1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Для этого нужно воспользоваться формулой

$$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \text{ и т.д.}$$

Следует отметить, что если в арифметической прогрессии убрать несколько первых членов, то получится новая арифметическая прогрессия. Ведь у новой последовательности по-прежнему каждый последующий член больше предыдущего на разность прогрессии.

Пример 7.

Найти сумму членов арифметической прогрессии с 11-го по 25-й, если $x_1 = 2$, $d = 5$.

Решение.

Заметим, что $x_{11} = 2 + 5 \cdot 10 = 52$. То есть нам нужно найти сумму первых 15 членов прогрессии y_n, у которой первый член $y_1 = x_{11} = 52$, а разность равна 5. Также в этой прогрессии $y_{15} = x_{25} = 122$. По формуле получаем, что эта сумма равна $\frac{y_1 + y_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{52 + 122}{2} \cdot 15 = 1305$.

Сумму членов арифметической прогрессии с 11-го по 25-й можно вычислить иначе. Она равна разности между суммой первых 25 членов прогрессии и суммой первых 10 ее членов. То есть искомая сумма равна $S_{25} - S_{10} = \frac{x_1 + x_{25}}{2} \cdot 25 - \frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{2 + 122}{2} \cdot 25 - \frac{2 + 47}{2} \cdot 10 = 1550 - 245 = 1305$.

К **536** 1) Пусть задана арифметическая прогрессия (a_n) с первым членом $a_1 = 7$ и разностью $d = 2$. Запишите первые 10 членов этой прогрессии. Предположите, по какому принципу составлены суммы $a_1 + a_8$; $a_2 + a_7$; $a_3 + a_6$? Составьте еще одну такую сумму членов. Найдите значения этих сумм. Что интересного вы замечаете? Продолжите исследование, вычислив несколько аналогичных сумм членов этой прогрессии. Сформулируйте гипотезу о свойстве пар членов прогрессии.

2)* Задайте произвольную арифметическую прогрессию и проверьте свою гипотезу. Докажите ее в общем виде.

537 1) Решите задачу: «Для долговременного проката автомобиля, срок которого не превышает месяц, предоставляются следующие условия. Первые сутки проката автомобиля стоят 2000 рублей. Оплата за каждые следующие сутки снижается на 50 рублей. Сколько нужно заплатить за третьи сутки проката?»

2) Прочитайте задачу: «Для долговременного проката автомобиля, срок, которого не превышает месяц, предоставляются следующие условия. Первые сутки проката автомобиля стоят 2000 рублей. Оплата за каждые следующие сутки снижается на 50 рублей. Сколько нужно заплатить за трое суток проката?» Чем эта задача отличается от предыдущей задачи? Решите ее.

3) Удобен ли использованный вами способ решения для ответа на вопрос: «Сколько нужно заплатить за 20 суток? за 31 сутки проката?»

4) Как можно упростить выполнение этих заданий? Что вы пока не знаете?

Сформулируйте цель дальнейшей деятельности. Для достижения цели воспользуйтесь текстом учебника на стр. 139–140 либо выполните следующее задание.

538 1) Пусть задана арифметическая прогрессия: 1; 2; 3; 4; 5; ... n, ... Чтобы быстрее вычислить сумму первых 100 ее членов:
$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100,$
используется следующий способ:
$S_{100} = \boxed{1} + \boxed{2} + ... + \boxed{99} + \boxed{100}$
$S_{100} = \boxed{100} + \boxed{99} + ... + \boxed{2} + \boxed{1}$
Отсюда:
$2S_{100} = 101 \cdot 100 = 10100.$
$S_{100} = = 5050.$
Объясните, с помощью каких рассуждений была найдена сумма первых 100 членов этой арифметической прогрессии. Можно ли использовать эту идею для нахождения первых 1000 членов этой прогрессии?

2)* Найдите сумму первых n членов произвольной арифметической прогрессии: x_1; x_2;... x_n;.... Каким способом можно это сделать? Сопоставьте полученное вами равенство с формулой на стр.139.

539 Дана арифметическая прогрессия с первым членом $-\frac{1}{3}$ и разностью $\frac{2}{3}$. Найдите сумму первых шести членов данной арифметической прогрессии.

1) Сколько действий вы должны выполнить, чтобы решить эту задачу?

2) Предположите, как нужно изменить формулу $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$, чтобы ответить на вопрос задачи сразу. Сравните свое предположение с учебником на стр. 140.

540 Найдите сумму первых 24 членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -4{,}2$; $d = 0{,}6$.

541 Найдите сумму первых 40 членов арифметической прогрессии 14; 9; 4; ....

542 Арифметическая прогрессия задана формулой $a_n = 0{,}4n + 5$. Найдите S_{36}.

543 Найдите сумму:
а) всех четных чисел от 2 до 1000;
б) всех натуральных чисел, кратных 11 и не больших 374;
в) всех натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1 и не больших 145.

544 Стрелок сделал 30 выстрелов в мишень. За первое попадание ему начислили 13 баллов, а за каждое следующее попадание начисляли на 0,9 балла больше, чем за предыдущее. Сколько раз промахнулся стрелок, если он набрал 215,4 балла?

545 Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

546 Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии, если для данной прогрессии верны следующие равенства:

а) $a_1 = 6$; $a_{13} = 42$; б) $a_6 = 45$; $a_{14} = -43$; в) $a_3 + a_7 = 5$, $a_4 = 1$.

547 Найдите разность и тринадцатый член арифметической прогрессии, если его первый член равен 9, а сумма первых десяти членов равна 10.

548 Найдите первый и девятый члены арифметической прогрессии, если ее разность равна -4, а сумма ее первых двадцати членов равна 336.

549 Найдите сумму членов арифметической прогрессии с 25-го по 35-й, если $a_1 = 40$; $d = -2$.

550 Про арифметическую прогрессию известно, что $a_5 + a_6 = 10$. Можно ли найти сумму первых: а) десяти, б) одиннадцати членов этой прогрессии?

551 Последовательность задана рекуррентно: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = b_n - 3$. Задайте последовательность формулой n-го члена и найдите сумму первых 5 ее членов.

П **552** Является ли членом арифметической прогрессии (z_n) число 3,8, если $z_1 = 10{,}4$ и $d = -0{,}6$. Если является, укажите его номер.

553 Найдите, при каком значении m числа $3m$; $m^2 + 2$ и $m + 4$ в указанном порядке будут последовательными членами арифметической прогрессии.

554 Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии:

а) a^4; $5a^4$; $9a^4$; $13a^4$; ...; б) $10 - a$; $8 - a$; $6 - a$; $4 - a$; ....

555 Сумма второго, четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 18, а их произведение равно -168. Найдите первый член прогрессии и разность прогрессии.

556 Решите задачи:

а) Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 18 км, одновременно выехали два велосипедиста. Первый из них прибыл в пункт B на 12 минут раньше второго, потому что его скорость была на 3 км/ч больше скорости второго. Найдите скорости велосипедистов.

б) Катер проплыл 8 км по течению реки и 16 км против течения реки, потратив на весь путь 1 час 20 минут. Какова скорость катера против течения реки, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?

Д **557** Найдите сумму всех нечетных чисел от 11 до 1001.

558 Найдите сумму всех четных натуральных чисел, не превосходящих 300, которые при делении на 13 дают остаток 5.

559 Маше на 8 Марта подарили 777 конфет. Маша хочет съесть все конфеты за несколько дней так, чтобы в каждый следующий день съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа дней это возможно?

560 Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если для данной прогрессии верны следующие равенства: $a_3 + a_8 = 23$, $a_6 = 17$.

561 Про арифметическую прогрессию известно, что $a_3 + a_{13} = 6$. Найдите сумму первых пятнадцати членов этой прогрессии.

562 Найдите сумму членов арифметической прогрессии с 20-го по 30-й, если $a_1 = 5$; $d = 2$.

563 Является ли членом арифметической прогрессии (b_n) число 26,3, если $b_1 = 52$ и $d = 2{,}1$? Если является, укажите его номер.

564 Найдите, при каком значении m числа $2m$; $m^2 - 3$ и $8m - 6$ будут последовательными членами арифметической прогрессии.

565 От пристани A по направлению к пристани B отошел катер. Через полчаса от той же пристани в том же направлении отошла моторная лодка, скорость которой на 6 км/ч больше скорости катера. К пристани B моторная лодка пришла одновременно с катером. Найдите скорость катера, если известно, что расстояние между пристанями составляет 90 км.

C **566*** Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки (то есть имеет вид 2^k, где k – натуральное число). Докажите, что n – также степень двойки.

Экспресс-тест № 4

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них – арифметическая прогрессия. Укажите ее.

А) 1; 2; 3; 5; ...;   В) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$;

Б) –1; –2; –4; –8; ...;   Г) –9; –7; –5; –3; ... .

№ 2

№ 2. Число –15,8 является членом арифметической прогрессии 8,2; 6,6; ... Определите порядковый номер этого числа.

А) 13;   Б) 14;   В) 17;   Г) 16.

№ 3		
1	2	3

№ 3. Каждой из последовательностей:

1) 6; 11; 16; ...;   2) 6; 1; –4; ...;   3) 6; 12; 18; ... .

поставьте в соответствие формулу n-го члена

А) $x_n = 11 - 5n$;   Б) $x_n = 6n$;   В) $x_n = \frac{n+1}{n}$;   Г) $x_n = 1 + 5n$.

№ 4

№4. Сумма второго и третьего членов арифметической прогрессии равна 16, разность ее равна 4. Определите первый член прогрессии.

А) 2; Б) 4; В) 5; Г) 6.

№ 5

№ 5. Арифметическая прогрессия задана условием $x_n = 4n - 7$. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии.

А) 75; Б) 150; В) 210; Г) –210.

№ 6

№ 6. Определите число членов арифметической прогрессии –12; –8; ..., меньших 48.

А) 15; Б) 12; В) 16; Г) 18.

№ 7

№ 7. Дана арифметическая прогрессия: 76; 65; 54; ... . Найдите последний положительный член этой прогрессии.

А) 1; Б) 11; В) 0; Г) 10.

Часть В

№ 8

№ 8. Четвертый член арифметической прогрессии равен 18. Найдите сумму первых семи членов прогрессии.

А) 80; Б) 126; В) 72; Г) 96.

№ 9

№ 9. Третий член арифметической прогрессии равен –3, а десятый равен 11. Запишите формулу общего члена прогрессии.

А) $x_n = -2n - 5$; Б) $x_n = 2n + 6$; В) $x_n = 2n - 9$; Г) $x_n = -2n + 6$.

№ 10

№ 10. Числа 55; $5s$; 95 образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите число s.

А) 15; Б) 75; В) 30; Г) 16.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 11. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 100, кратных 6.

№ 12. Известно, что сумма первых n членов последовательности находится по формуле $S_n = \dfrac{n^2 - 4n}{2}$. Запишите первые шесть членов этой последовательности. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3			№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
		1	2	3							
Г	Г	Г	А	Б	Б	Г	А	Г	Б	В	А

№ 11

1) Ряд чисел, кратных 6, является арифметической прогрессией, в которой $x_1 = 6$, $d = 6$, $x_n = 6n$ – формула общего члена.

2) Определим количество членов этой прогрессии, не превосходящих 100:

$6n < 100 \Leftrightarrow n < 16\frac{2}{3}$.

Так как $n \in N$, то $n = 16$. Тогда число, не превосходящее 100 и кратное 6 равно

$x_{16} = 96$.

3) $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$, $S_{16} = 816$.

Ответ: 816.

№ 12

Находя разность S_n и S_{n-1}, мы получим n-й член этой последовательности.

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n^2 - 4n}{2} - \frac{(n-1)^2 - 4(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 4n - (n^2 - 2n + 1 - 4n + 4)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 4n - n^2 + 2n - 1 + 4n - 4}{2} = \frac{2n - 5}{2} = n - 2{,}5$$

Следовательно, общий член последовательности задается формулой $a_n = n - 2{,}5$. Значит данная последовательность является арифметической прогрессией.

Тогда $a_1 = 1 - 2{,}5 = -1{,}5$;

$a_2 = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$;

$a_3 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$;

$a_4 = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$;

$a_5 = 5 - 2{,}5 = 2{,}5$;

$a_6 = 6 - 2{,}5 = 3{,}5$.

Ответ: –1,5; –0,5; 0,5; 1,5; 2,5; 3,5. Данная последовательность является арифметической прогрессией.

Шкала успешности:

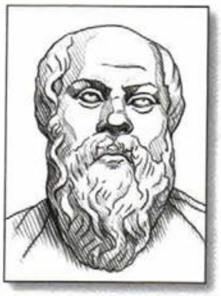
12 – 18 баллов – *отлично*

9 – 11 баллов – *хорошо*

7 – 8 баллов – *удовлетворительно*

§ 3. Геометрическая прогрессия

1. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена



Хорошее начало не мелочь, хоть начинается с мелочи.

Сократ (ок. 469 до н. э.–399 до н. э.),
древнегреческий философ

Рассматривая задачу о вкладах в банк, мы выявили особый вид последовательностей – арифметическую прогрессию и изучили ее. Выявим еще один вид последовательностей, вновь обращаясь к вкладам капиталов в банк.

Рассмотрим ситуацию, когда вкладчик положил N рублей под $a\ \%$. По прошествии расчетного периода сумма средств на счете вкладчика увеличилась на $a\ \%$. Если вкладчик положит полученную (вместе с процентами) сумму в банк на тех же условиях, то банк будет распоряжаться большей суммой и к концу следующего периода начислит большую по сравнению с первым сумму денег. Вклад увеличится на определенное число процентов не от *начального* его значения, а от *предыдущего*. Как мы помним, так возникают «сложные проценты». В 6 классе мы вычисляли величину вклада, которую получит вкладчик через год, два года, три года,... n лет с помощью выведенных нами тогда формул, теперь решим эту задачу, используя понятие последовательности.

Пусть $a\ \%$ – это процент на вклад, который предлагает банк. Это означает, что начальный вклад в N рублей через год увеличится на величину $N \cdot \frac{a}{100}$, значит, он станет равным $N \cdot (1 + \frac{a}{100}) = N \cdot q$, где через q мы обозначили число $1 + \frac{a}{100}$. Еще через год новый вклад также увеличится в q раз, то есть он станет равным $(N \cdot q) \cdot q$, через три года эта величина увеличится в q раз и так далее.

Итак, рассматривая «сложные проценты», мы получили числовую последовательность, каждый член которой превосходит предыдущий в одно и то же число раз.

Возникающая при этом числовая последовательность называется геометрической прогрессией. Введем соответствующее определение.

Определение. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением на одно и то же не равное нулю число q, называется **геометрической прогрессией.** Число q называется **знаменателем** геометрической прогрессии.

Опираясь на введенные нами обозначения, можно описать правило составления геометрической прогрессии на математическом языке: $x_{n+1} = x_n \cdot q$ (получили рекуррентную формулу). Отсюда знаменатель прогрессии $q = \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Если первый член геометрической прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q, то $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_2q = x_1q^2$, $x_4 = x_3q = x_1q^3$ и т.д. Легко заметить, что $x_n = x_1q^{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$.

Формула $x_n = x_1q^{n-1}$ сохраняется для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, если вспомнить, что $q^0 = 1$. Мы получили **формулу общего члена геометрической прогрессии**:

$$\boxed{x_n = x_1 \cdot q^{n-1}}$$

* * *

Строго эта формула обосновывается при помощи принципа математической индукции.

Доказательство.

При $n = 1$: $x_1 = x_1q^0 = x_1$, это верно. Пусть при фиксированном $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется равенство $x_n = x_1q^{n-1}$. Тогда $x_{n+1} = x_nq = x_1q^{n-1} \cdot q = x_1q^{n} = x_1q^{(n+1)-1}$; формула выполняется для следующего значения $n+1$. Таким образом, формула общего члена геометрической прогрессии выведена для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ методом математической индукции. ■

Пример 1.

Дана геометрическая прогрессия: 162; 54; ... . Найдите ее седьмой член.

Решение.

$q = \frac{x_2}{x_1} = \frac{54}{162} = \frac{1}{3}$. По формуле общего члена геометрической прогрессии:

$$x_7 = x_1 \cdot q^{7-1} = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^6} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

Рассмотрим примеры геометрических прогрессий:

1) 2, 6, 18, 54,... (ее первый член $x_1 = 2$, а знаменатель $q = 6 : 2 = 3$);

2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{50}, -\frac{1}{250}, \ldots$ (ее первый член $x_1 = -\frac{1}{2}$, а знаменатель $q = \frac{1}{5}$);

3) $-3, -6, -12, -24, \ldots$ (ее первый член $x_1 = -3$, а знаменатель $q = 2$);

4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ (ее первый член $x_1 = \frac{1}{3}$, а знаменатель $q = \frac{1}{3}$).

Члены первых двух прогрессий увеличиваются, а члены последних двух прогрессий уменьшаются.

Вообще говоря, если $q > 1$, то при $x_1 > 0$ геометрическая прогрессия строго возрастает, а при $x_1 < 0$ – строго убывает. Если же $0 < q < 1$, то при $x_1 > 0$ геометрическая прогрессия строго убывает, а при $x_1 < 0$ – строго возрастает. При $q = 1$ геометрическая прогрессия является постоянной последовательностью ($x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$).

В отличие от рассмотренных выше последовательностей знаменатель прогрессии: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ отрицательный, и знаки ее членов чередуются. Ясно, такая картина будет наблюдаться при любом $q < 0$ и такие геометрические прогрессии не будут являться ни возрастающими, ни убывающими.

* * *

Итак, если $q > 0$, то геометрическая прогрессия является монотонной последовательностью (строго возрастающей или строго убывающей), если $q < 0$ – не является монотонной.

Если $|q| \leqslant 1$, то $|x_n| = |x_1q^{n-1}| \leqslant |x_1|$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, и геометрическая прогрессия является ограниченной последовательностью. Если $|q| > 1$, то геометрическая прогрессия является неограниченной последовательностью. Доказать в общем виде это пока нам не под силу, проведем доказательство для случая $q = 2$.

Формула общего члена геометрической прогрессии со знаменателем 2 имеет вид: $x_n = x_1 \cdot 2^{n-1}$. Легко доказать, что при $n = 2, 3, \ldots$ выполняется неравенство $2^{n-1} \geqslant n$. В самом деле, при $n = 2$ имеем $2^1 \geqslant 2$ – верное неравенство. Предположим, что при фиксированном $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $2^{n-1} \geqslant n$. Тогда

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geqslant 2n \geqslant n+1,$$

и неравенство $2^{n-1} \geqslant n$ выполняется для следующего значения $n+1$. Методом математической индукции доказано, что неравенство $2^{n-1} \geqslant n$ выполняется при всех $n = 2,3,\ldots$. Тогда $|x_n| \geqslant n \cdot |x_1|$.

Предположим, что (x_n) – ограниченная последовательность. Тогда при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant C$. Тогда $n \cdot |x_1| \leqslant C$, и $n \leqslant \dfrac{C}{|x_1|}$ при всех $n = 2, 3, \ldots$ (мы учли, что $x_1 \neq 0$). Но обязательно найдется натуральное число $n > \dfrac{C}{|x_1|}$. Полученное противоречие показывает, что x_n – неограниченная последовательность. ■

По формуле общего члена последовательности можно сразу определить, является ли последовательность геометрической прогрессией.

Теорема. Последовательность (x_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $x_n = aq^n$, где $a, q \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $q \neq 0$, при этом знаменатель прогрессии равен q.

Доказательство.

Если (x_n) – геометрическая прогрессия, то $x_n = x_1 q^{n-1} = \dfrac{x_1}{q} = aq^n$, где $a = \dfrac{x_1}{q} \neq 0$, $q \neq 0$.

Обратно, если общий член последовательности задается формулой $x_n = aq^n$, $a, q \neq 0$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{aq^{n+1}}{aq^n} = q$, $q \neq 0$, т.е. (x_n) – геометрическая прогрессия со знаменателем q. ■

Рассмотрим свойство геометрической прогрессии, благодаря которому она получила свое название.

Теорема. Последовательность x_n является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда все ее члены отличны от нуля и квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, т.е. $x_n^{\,2} = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ (если все $x_n > 0$, то $x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}$ – среднее геометрическое чисел x_{n-1} и x_{n+1}).

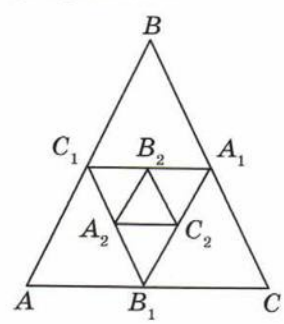
Доказательство.

Если x_n – геометрическая последовательность, то $x_{n+1} = x_n \cdot q$, $x_{n-1} = \dfrac{x_1}{q}$, откуда $x_{n-1} \cdot x_{n+1} = \dfrac{x_n}{q} \cdot x_n q = x_n^{\,2}$ $(q \neq 0)$.

Обратно, если $x_n^{\,2} = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$ при $n = 2, 3, 4, \ldots$, то $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Таким образом, $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{x_4}{x_3} = \ldots = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ldots$, т.е. отношение двух соседних членов последовательности – постоянная величина. Значит, x_n – геометрическая прогрессия. ■

Пример 2.

Точки A_1, B_1, C_1 являются серединами сторон треугольника ABC, точки A_2, B_2, C_2 – серединами сторон треугольника $A_1B_1C_1$, и т.д., точки $A_nB_nC_n$ – серединами сторон треугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$, и т.д. Доказать, что последовательность x_n площадей треугольников $A_n\,B_n\,C_n$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\dfrac{1}{4}$.



Доказательство.

Так как $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$, $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$, то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Как известно, при этом $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4}S_{A_1B_1C_1}$, ... , $S_{A_nB_nC_n} = \frac{1}{4}S_{A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}}$. Значит, площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$. ■

* * *

Пример 3.

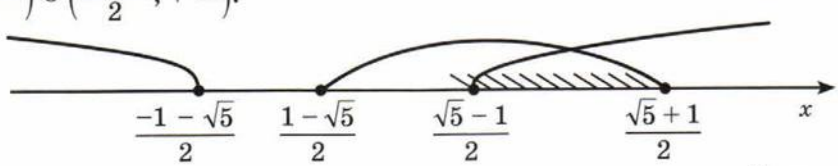
Стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию. Какие значения может принимать знаменатель этой прогрессии?

Решение.

Запишем длины сторон треугольника в виде a, aq, aq^2, где q – искомый знаменатель. Из трех отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда длина каждого из отрезков меньше суммы длин двух других, т.е. должны выполняться одновременно три неравенства: $a + aq > aq^2$, $a + aq^2 > aq$, $aq + aq^2 > a$. Так как a – положительное число, то остается решить систему трех неравенств:

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 & (1) \\ q^2 - q + 1 > 0 & (2) \\ q^2 + q - 1 > 0 & (3) \end{cases}$$

Неравенство (2) выполняется для всех действительных значений q, так как квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом $q^2 - q + 1$ имеет отрицательный дискриминант. Квадратный трехчлен $q^2 - q - 1$ имеет корни $q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, поэтому множество решений первого неравенства системы имеет вид $q \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Квадратный трехчлен $q^2 + q - 1$ имеет корни $q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, поэтому множество решений третьего неравенства системы имеет вид $q \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.



Пересечение этих множеств дает множество решений системы $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$. Так как все эти значения q положительны, то это и есть ответ к нашей задаче.

Ответ: знаменатель этой прогрессии $q \in \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

567 Какая сумма будет на срочном вкладе, если на него положили 2000 р. под 5% годовых через 1 год, 2 года, 3 года? На срочном вкладе начисляются сложные проценты, то есть проценты начисляются как на сумму вклада, так и на начисленные в предыдущие периоды проценты.

568 Найдите закономерность и продолжите последовательность на три числа:
$-\frac{2}{29}; -\frac{4}{29}; -\frac{8}{29}; \dots$.
Задайте эту последовательность рекуррентно.

569 Запишите последовательность из 5 чисел, в которой первое число равно 4, а каждое следующее больше предыдущего в 1,5 раза.

570 Даны последовательности чисел:

а) 1,2; 1,4; 1,6; ...;
в) 2,4; 4,8; 9,6; ...;
б) 1,2; 0,6; 0,3;...;
г) 8,1; 2,7; 0,9; ....

1) Определите, какая последовательность лишняя?

2) Чем похожи все остальные последовательности?

3) Придумайте пример аналогичной последовательности. Познакомьтесь с названием подобных последовательностей в учебнике. Какое определение вы использовали? Укажите знаменатель каждой из данных прогрессий.

571 Дан первый член геометрической прогрессия $b_1 = 36$ и ее знаменатель $q = -3$.
1) Проанализируйте, каким образом выписаны члены этой прогрессии, и продолжите запись:

$b_2 = 36 \cdot (-3)$
$b_3 = 36 \cdot (-3) \cdot (-3) = 36 \cdot (-3)^2$
$b_4 =$
$b_5 =$
...

Что интересного вы наблюдаете? Какой вид будет иметь b_n?

2) Можно ли обобщить ваши наблюдения для любой геометрической прогрессии? Как найти общий член прогрессии, используя первый член и знаменатель прогрессии. Сравните составленную вами формулу с формулой из учебника на стр. 159.

572 Найдите четыре первых члена геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -2$; $q = -3$.

573 В геометрической прогрессии (b_n) с первым членом $b_1 = \frac{1}{625}$ и знаменаталем $q = -5$ найдите: а) b_2; б) b_4; в) b_7; г) b_k.

574 В геометрической прогрессии восьмой член равен 12, а девятый член равен 4. Найдите седьмой член этой прогрессии.

575 Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии: $\frac{1}{256}$; $-\frac{1}{128}$; $\frac{1}{64}$; ....

576 Последовательность (a_n) – геометрическая прогрессия. Выразите:

а) a_5 через a_1 и q;
б) a_7 через a_4 и q.

577 Найдите первый член геометрической прогрессии, если:

а) $c_5 = \frac{2}{3}$; $q = \frac{2}{3}$;
б) $c_4 = 8$; $c_7 = -64$.

578 Числа 2, x, 8 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Каким может быть число x?

579 Второй член геометрической прогрессии равен 3, а пятый равен –24. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите ее седьмой член.

580 Как известно, клетки размножаются делением. Одноклеточная зеленая водоросль Chlorogonium, которая встречается в прудах и реках, имеет форму эллипса. Обычно она достигает размеров, превышающих исходные приблизительно в четыре раза, а затем делится на четыре дочерние клетки. Сколько водорослей образуется после пяти делений 100 таких растений?

581 При каком натуральном значении n числа n, $n + 15$, $46n - 30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

582 В геометрической прогрессии с положительными членами выполнены следующие соотношения: $b_1 + b_2 = 20$, $b_3 + b_4 = 180$. Какой по счету член данной последовательности равен 405?

583 Каким может быть пятый член геометрической прогрессии, если $b_3 \cdot b_7 = 4$?

584 Дана последовательность (b_n), у которой $b_8 = 12$, $b_{12} = -8$. Является ли данная последовательность геометрической прогрессией?

П **585** Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_5 = 16$ и $x_{15} = 36$.

586 Найдите разность и пятнадцатый член арифметической прогрессии, если ее седьмой член равен 0, а сумма первых семнадцати членов равна 17.

587 Решите неравенство:

а) $-x^2 + 6x - 5 < 0$; б) $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 > 0$; г) $-2x^2 + x - 1 \leq 0$.

Д **588** Найдите седьмой член геометрической прогрессии (c_n), если $c_1 = 6$ и $q = 2$.

589 В геометрической прогрессии третий член равен -6, а четвертый член равен 3. Найдите первый член этой прогрессии.

590 Найдите первый член геометрической прогрессии (a_n), если $a_6 = 121{,}5$ и $q = 3$.

591 Числа 2, x, 18 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Каким может быть число x?

592 Третий член геометрической прогрессии равен 40, а шестой равен 5. Запишите формулу общего члена прогрессии и найдите ее седьмой член.

593 При каком значении x числа $2x + 1$; $x + 2$; $8 - x$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите эти числа.

594 Каким может быть седьмой член геометрической прогрессии, если $b_2 \cdot b_{12} = 1$?

595 Числа x, 8, y являются тремя последовательными (в данном порядке) членами геометрической прогрессии. А числа x, 10, y являются последовательными (в данном порядке) членами арифметической прогрессии. Найдите x и y.

596 Дана последовательность (b_n), у которой $b_3 = 9$, $b_9 = -3$. Является ли данная последовательность геометрической прогрессией?

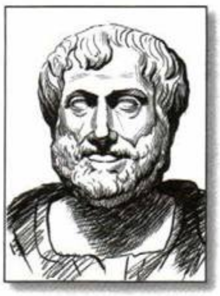
597 Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 5$ и $x_9 = 45$.

598 Решите неравенство:

а) $-x^2+4x-3 \leqslant 0$; б) $-x^2-4x-3>0$; в) $9x^2-6x+1>0$; г) $-3x^2+x-1 \leqslant 0$.

С **599** Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвертый член геометрической прогрессии?

2. Сумма первых n членов геометрической прогрессии



Успех во всяком деле зависит от двух условий: правильного установления конечной цели и отыскания соответствующих средств, ведущих к этой цели.

Аристотель (IV век до н.э.),
древнегреческий ученый, философ

Для арифметической прогрессии мы вывели формулу суммы первых n членов, которая существенно облегчает задачу суммирования ее членов. Полезным будет вывести аналогичную формулу и для геометрической прогрессии.

Начнем с широко известной притчи, в которой описана задача на суммирование членов геометрической прогрессии.

Раджа, пожелав вознаградить изобретателя шахмат, обещал исполнить любое его желание. Изобретатель попросил положить одно зерно ячменя на первую клетку шахматной доски, два – на вторую и так удваивать количество зерен на каждой клетке, пока вся доска не будет заполнена.

Раджа поначалу обрадовался скромности мудреца. Он начал считать требуемое количество зерен: 1; 2; 4; 8; 16.... С каждой новой клеткой его энтузиазм уменьшался. Скоро стало ясно, что для выполнения обещания не хватит ячменя в зернохранилищах всего государства, поскольку сумма полученных 64 членов этой прогрессии составила бы 18 446 744 073 709 551 615 зерен, которых хватило бы, чтобы 8 раз засадить ячменем весь земной шар!

Отметим, что существует прием, который позволит посчитать требуемое количество зерен, не выполняя 63 операции сложения. Это можно сделать так: добавим в первую клетку еще одно зерно. Тогда в первых двух клетках зерен окажется поровну – по 2, и в первых двух клетках зерна будет столько же, сколько в третьей клетке – 4. Значит, количество зерен в первых трех клетках равно удвоенному этому количеству, то есть 8 – количеству зерен в четвертой клетке и т.д. В итоге окажется, что общее количество зерен на доске равно

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Осталось убрать одно зернышко.

Однако эта идея не каждому придет в голову. К тому же рассмотренный нами прием не будет работать для других геометрических прогрессий. Решим задачу нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии в общем случае и будем пользоваться полученной формулой для всех аналогичных задач.

Пусть x_n – геометрическая прогрессия, q – знаменатель прогрессии, а S_n – сумма ее первых n членов ($n = 1, 2, \ldots$). Найдем S_n.

Решение.

Рассмотрим равенство:

$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Умножив обе части этого равенства на q, получим:

$S_n q = x_1 q + x_2 q + \ldots + x_n q$ или $S_n q = x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1}$;

Вычитая из полученного равенства первоначальное, получим:

$S_n q - S_n = x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{n+1} - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n$, то есть $S_n (q - 1) = x_{n+1} - x_1$.

Окончательно имеем (при $q \neq 1$) $S_n = \frac{x_{n+1} - x_1}{q - 1}$ или так как $x_{n+1} = q^n x_1$, то $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Итак, мы получили следующую **формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:**

$$S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Если знаменатель геометрической прогрессии $q = 1$, то эта формула не работает, так как возникает деление на нуль. В этом случае непосредственно замечаем, что последовательность постоянна, и $S_n = nx_1$.

Найдем ответ к приведенной в начале притче о шахматах с помощью полученной нами формулы: $S_n = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$. Решение не потребовало от нас никаких специальных идей и приемов.

Приведем примеры решения задач на геометрическую прогрессию.

Пример 1.

Найти сумму $96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3 + 1{,}5 + 0{,}75 + 0{,}375 + 0{,}1875$.

Решение.

Каждое слагаемое в этой сумме меньше предыдущего в 2 раза. Переформулируем эту задачу на языке последовательностей: найти сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $x_1 = 96$, $q = \frac{1}{2}$.

Так как знаменатель меньше 1, то, чтобы избежать вычислений с отрицательными числами преобразуем формулу $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = x_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Тогда

$$S_{10} = 96 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 96 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) = 192 - 3 \cdot 2^6 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 192 - \frac{3}{2^4} = 192 - \frac{3}{16} = 191\frac{13}{16}.$$

Как мы знаем, члены геометрической прогрессии возрастают очень быстро. Даже прогрессия из притчи, знаменатель которой был равен всего лишь двум, растет очень быстро. Если бы изобретатель шахмат попросил увеличивать количество зерен с каждой клеткой не в 2 раза, а на 2 зерна, раджа вознаградил бы его горстью зерен. Вообще говоря, геометрическая прогрессия с положительным первым членом и знаменателем, большим 1, характеризуется очень быстрым ростом. Начиная с некоторого номера, члены такой прогрессии становятся очень большими, причем этот рост происходит значительно быстрее, чем у арифметической прогрессии.

* * *

Мы пока не можем аккуратно сформулировать и доказать утверждения такого рода. Отметим только, что если арифметическая прогрессия характеризуется постоянством разности $x_{n+1} - x_n$, то для геометрической прогрессии

$$x_{n+1} - x_n = x_1 q^n - x_1 q^{n-1} = x_1 (q-1)q^{n-1},$$

то есть эта разность также является геометрической прогрессией с тем же знаменателем q и очень быстро растет.

Сравним арифметическую прогрессию и геометрическую прогрессию

1, 2, 3, ..., n (1)

1, 2, 4, ... 2^{n-1} (2)

Если в прогрессии (1) каждый последующий член больше предыдущего на постоянное число 1, то в прогрессии (2) разность $x_{n+1} - x_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ совпадает с x_n и очень быстро растет.

С другой стороны, для прогрессии (1) сумма первых n членов $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{S_n}{x_n} = \frac{n+1}{2}$, а для прогрессии (2) $S_n = 2^n - 1$, и $\frac{S_n}{x_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$. И в общем случае **для арифметической прогрессии с положительной разностью сумма первых n членов растет значительно быстрее n-го члена, а в геометрической прогрессии с положительным первым членом и знаменателем, большим 1, отношение $\frac{S_n}{x_n}$ ограничено** (аккуратных доказательств мы не проводим).

Образно говоря, рост арифметической прогрессии равномерен, а геометрическая прогрессия (при $x_1 > 0$, $q > 1$) возрастает резко ускоренно, основная «доля» в сумме первых n членов приходится на n-й член.

Пример 2.

Все члены геометрической прогрессии положительны, сумма первых трех ее членов равна 14, а сумма их обратных величин равна $\frac{7}{8}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Решение.

Пусть первый член прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q. Тогда $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, и из условия имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 q + x_1 q^2 = 14 & (1) \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 q} + \frac{1}{x_1 q^2} = \frac{7}{8} & (2) \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получим: $(1 + q + q^2) \cdot (1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q^2}) = \frac{49}{4}$.

Решим полученное уравнение: $4(1 + q + q^2)^2 = 49q^2$.

По условию все члены прогрессии положительны, значит, $q = \frac{x_2}{x_1} > 0$. Тогда последнее уравнение равносильно $2(1 + q + q^2) = 7q$, т.е. $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $q_1 = 2$ и $q_2 = \frac{1}{2}$. Если $q = 2$, то из уравнения (1) имеем: $x_1 (1 + 2 + 4) = 14$, т.е. $x_1 = 2$.

Если $q = \frac{1}{2}$, то $x_1 (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 14$, т.е. $x_1 = 8$.

Ответ: 2, 4, 8,... и 8, 4, 2,....

Пример 3.

Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии. Докажите, что $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

Доказательство.

Пусть первый член прогрессии равен x_1, а знаменатель равен q. Тогда $S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$,

$S_{2n} = x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1}$, $S_{3n} = x_1 \cdot \frac{q^{3n}-1}{q-1}$. Нужное равенство перепишется в виде

$$x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \cdot \left(x_1 \cdot \frac{q^{3n}-1}{q-1} - x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1}\right) = \left(x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1} - x_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}\right)^2,$$

то есть $\frac{x_1^2}{(q-1)^2}(q^n-1)(q^{3n}-q^{2n}) = \frac{x_1^2}{(q-1)^2}(q^{2n}-q^n)^2$. После сокращения на ненулевой множитель $\frac{x_1^2}{(q-1)^2}$, получим равносильное равенство $(q^n-1)(q^{3n}-q^{2n}) = (q^{2n}-q^n)^2$, которое проверяется непосредственным раскрытием скобок (обе части равны $q^{4n}-2q^{3n}+q^{2n}$).

Заметим, что в случае $q = 1$, эта формула приобретает вид $nx_1 \cdot (3n \cdot x_1 - 2n \cdot x_1) = (2n \cdot x_1 - n \cdot x_1)^2$, т.е. $n^2 x_1^2 = n^2 x_1^2$, и также справедлива. ■

К **600** Решите задачи:

а) Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью −3.
б) Дана геометрическая прогрессия b_n, у которой $b_1 = 2$, а $q = -3$. Найдите b_5.
в) Дана геометрическая прогрессия b_n, у которой $b_1 = 2$, а $q = -3$. Найдите сумму первых пяти членов данной прогрессии.
Ответьте на вопросы:

1) Чем отличаются задачи и способы их решения?
2) Как можно упростить выполнение последнего задания?
3) Что вы пока не знаете?

Сформулируйте цель дальнейшей деятельности. Для достижения цели воспользуйтесь текстом учебника на стр. 154–157 либо выполните следующее задание.

601 1) Прочитайте задачу: «Дана геометрическая прогрессия (b_n) со знаменателем 3, ее первый член равен 999 999. Найдите сумму первых шести ее членов».

2) Можно решить эту задачу, обозначив слагаемые искомой суммы x_1; x_2; x_3; ... x_6. Проанализируйте это решение.
Рассмотрим равенство:
$S_6 = x_1 + x_2 + ... + x_6$.
Умножив обе части этого равенства на $q = 3$, *получим:*
$S_6 \cdot 3 = x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 3 + ... + x_6 \cdot 3$ *или* $S_6 \cdot 3 = x_2 + x_3 + ... + x_6 + x_7$;
Вычитая из полученного равенства первоначальное, получим:
$3S_6 - S_6 = x_2 + x_3 + ... + x_6 + x_7 - x_1 - x_2 - x_3 - ... - x_6$, *то есть* $2S_n = x_7 - x_1$.
Значит, $S_6 = \frac{x_7 - x_1}{2}$, *так как* $x_7 = x_1 q^6$, *то* $S_6 = \frac{x_1 q^6 - x_1}{2} = \frac{x_1(q^6-1)}{2}$.
Подставив значения x_1 *и* q *в полученную формулу, получим:*
$S_6 = \frac{999999 \cdot (3^6-1)}{2} = \frac{999999 \cdot (729-1)}{2} = \frac{999999 \cdot 364}{1} =$
$= (1\,000\,000 - 1) \cdot 364 = 364\,000\,000 - 364 = 363999636$.

3) Предположите, как может быть найдена сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом x_1.

4)* Выведите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Сравните свои рассуждения с учебником на стр. 157.

602 Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = \frac{1}{259}$; $q = 6$.

603 Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии 162; 108; 72; ....

604 Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, если ее второй член равен 6, а третий равен 18.

605 Найдите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии, если ее третий член равен 256, а шестой равен −32.

606 Найдите сумму первых десяти членов возрастающей геометрической прогрессии, если третий ее член больше второго на 6, а пятый больше третьего на 36.

607 Последовательность задана рекуррентно: $b_1 = 1$; $b_{n+1} = -3b_n$. Задайте последовательность формулой n-го члена и найдите сумму первых 5 ее членов.

608 При поступлении в университет студент ежегодно оплачивает свое обучение. При этом по договору оплата за каждый следующий год увеличивается на 5% от предыдущей выплаты. Сколько студент выплатит за пятый год обучения, если за первый год он заплатил 20 000 рублей. В какую сумму ему обойдется 5 лет обучения в этом университете?
Переведите условие задачи на язык последовательностей. Какая последовательность рассматривается? Запишите формулы, которые следует использовать для решения этой задачи.

П **609** Число 192 является членом геометрической прогрессии −0,375; 0,75; −1,5; .... Найдите номер этого числа.

610 Между числами 16 и 81 вставьте три таких числа, чтобы с данными числами образовалась геометрическая прогрессия. Укажите все тройки таких чисел.

611 Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 + b_6 = 1260$; $b_4 - b_5 + b_6 = 945$.

612 Решите неравенства:

а) $(x-3)(x+8) > 0$; б) $(x-3)^2(x+8) > 0$; в) $(x-3)^3(x+8)^2 > 0$.

613 Решите неравенства:

а) $(4-x)(x-2) \geqslant 0$; б) $(4-x)^2(x-2) \geqslant 0$; в) $(4-x)^3(x-2)^2 \geqslant 0$.

Д **614** Найдите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии (a_n), если $a_1 = -3$ и $q = 3$.

615 Найдите первый член геометрической прогрессии (x_n), если $q = \frac{1}{5}$; $S_4 = 156$.

616 Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии, если ее третий член равен 256, а восьмой равен 8.

617 Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, если ее второй член равен −3, а пятый равен 81.

618 Какой может быть сумма первых шести членов геометрической прогрессии, если ее второй член равен 6, а четвертый равен 24?

619 Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_{10} = 9b_8$; $b_3 + b_6 = 168$.

620 Решите задачу № 608. При расчетах используйте калькулятор, ответ округлите до рублей.

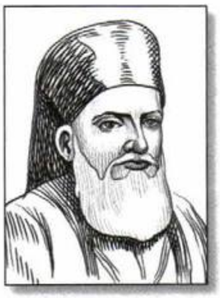
621 Решите неравенства:

а) $(x-5)(x+1)>0$; б) $(5-x)^2(x+1)\leqslant 0$; в) $(5-x)^3(x+1)^2>0$.

С **622*** Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 3, а сумма их квадратов 21. Какое наибольшее значение может принимать сумма их кубов?

623* Кузнечик прыгает по плоскости так, что длина каждого следующего прыжка вдвое больше длины предыдущего прыжка. Сможет ли кузнечик когда-нибудь вернуться в начальную точку?

3*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии



В знанье – величие и краса,
Знанье дороже, чем клад жемчужин:
Время любой уничтожит клад,
Мудрый и знающий вечно нужен.

Мухаммед Аззахири ас-Самарканди (XII в.), персидский поэт

Для геометрической прогрессии мы научились находить сумму нескольких ее первых членов. Задача нахождения суммы *всех* членов прогрессии не ставилась – ведь количество слагаемых в такой сумме бесконечно. Однако, как это ни удивительно, для некоторых геометрических прогрессий, несмотря на то, что членов ее бесконечно много, вычислить сумму всех ее членов возможно. В этом пункте мы выясним, как и в каких случаях можно найти подобную сумму, и тем самым расширим круг своих возможностей при работе с последовательностями.

Вспомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = x_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, которую можно переписать в виде: $S_n=\dfrac{x_1}{1-q}+\dfrac{x_1}{q-1}\cdot q^n$.

Если знаменатель прогрессии q по модулю меньше 1, то величина q^n при неограниченном увеличении n становится очень малой, «стремится к нулю». Пока мы не доказываем этот факт, а принимаем его как нечто интуитивно ясное. В старших классах мы введем необходимые определения и сделаем это на более строгом уровне обоснования.

Формула для S_n содержит постоянное слагаемое $\dfrac{x_1}{1-q}$, которое не зависит от значения n, и «переменное» слагаемое $\dfrac{x_1}{q-1}\cdot q^n$, которое при неограниченно большом n стремится к нулю (из-за умножения на q^n). Поэтому величина S_n при неограниченном увеличении n стремится к значению $S=\dfrac{x_1}{1-q}$, которое естественно считать суммой *всех* (в бесконечном количестве!) членов геометрической прогрессии.

Определение. Если знаменатель q геометрической прогрессии по модулю меньше 1, то геометрическая прогрессия называется **бесконечно убывающей**. Число $S=\dfrac{x_1}{1-q}$, где

x_1 – первый член прогрессии, называется **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.**

Итак, мы имеем следующую **формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:**

$$S = \frac{x_1}{1-q}, \text{ где } |q| < 1$$

Пример 1.

Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

Решение.

Заметим, что слагаемые являются последовательными членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$. Применяя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Пример 2.

Найти сумму площадей всех треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,..., $A_nB_nC_n$,... из примера 2 п.3.3.1, если площадь треугольника ABC равна S_0.

Решение.

В примере 2 п.3.3.1. было показано, что площади треугольников образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$ (бесконечно убывающую, т.к. $\frac{1}{4} < 1$). Так первый член ее – площадь S_0 треугольника ABC, то сумма бесконечно убывающей прогрессии равна $\frac{S_0}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_0$.

Пример 3.

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов первых n членов равна сумме первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в три раза меньше суммы первых $3n$ членов.

Решение:

Если числа $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, то числа $x_1^2, \ldots, x_n^2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^2, а числа $x_1^3, \ldots, x_n^3, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^3. Тогда из условия можно составить следующую систему уравнений для нахождения x_1 и q:

$$\begin{cases} x_1^2 \cdot \dfrac{q^{2n}-1}{q^2-1} = x_1 \cdot \dfrac{q^{2n}-1}{q-1} \\ x_1^3 \cdot \dfrac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \dfrac{1}{3}x_1 \cdot \dfrac{q^{3n}-1}{q-1} \end{cases}$$

Так как прогрессия бесконечно убывающая, то $q^{2n} \neq 1$, $q^{3n} \neq 1$, $q \neq 1$, $q^2 \neq 1$, $q^3 \neq 1$.

Разделим обе части первого уравнения системы на $x_1 \cdot \frac{q^{2n}-1}{q-1}$, получим: $\frac{x_1}{q+1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = q + 1$.

Разделим обе части второго уравнения системы на $x_1 \cdot \dfrac{q^{3n}-1}{q-1}$, получим: $\dfrac{x_1{}^2}{q^2+q+1}=\dfrac{1}{3}$. Значит, $x_1{}^2=\dfrac{1}{3}(q^2+q+1)$.

Из первого уравнения $x_1{}^2=(q+1)^2$. Приравняв правые части последних равенств, получим квадратное уравнение относительно q:

$$q^2+q+1=3q^2+6q+3 \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0.$$

Это уравнение имеет два корня $q_1=-2$, $q_2=-\dfrac{1}{2}$. Так как прогрессия бесконечно убывающая, то $|q|<1$, значит, $q_1=-2$ – посторонний корень и $q=-\dfrac{1}{2}$, тогда $x_1=q+1=\dfrac{1}{2}$.

Искомая сумма бесконечно убывающей прогрессии равна

$$S=\frac{x_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии может быть применена к записи бесконечной периодической десятичной дроби в виде отношения двух целых чисел.

Пример 4.

Представить в виде отношения двух целых чисел бесконечные периодические десятичные дроби:

а) 0,(25); б) 1,1(234).

Решение.

а) Дробь 0,(25) можно представить как бесконечно убывающую прогрессию со знаменателем $q=\dfrac{1}{100}$:

$0{,}(25)=\dfrac{25}{10^2}+\dfrac{25}{10^4}+\dfrac{25}{10^6}+\ldots$. Тогда, применяя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии, получим: $0{,}(25)=\dfrac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{25}{99}$.

б) Дробь 1,1(234) можно представить как сумму числа 1,1 и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$1{,}1(234)=1{,}1+\dfrac{234}{10^4}+\dfrac{234}{10^7}+\dfrac{234}{10^{10}}+\ldots$ (первый член прогрессии $x_1=\dfrac{234}{10^4}$, знаменатель $q=\dfrac{1}{1000}$).

Тогда $1{,}1(234)=\dfrac{11}{10}+\dfrac{\frac{234}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}=\dfrac{11}{10}+\dfrac{234}{10^4}\cdot\dfrac{10^3}{999}=\dfrac{11}{10}+\dfrac{234}{9990}=\dfrac{11}{10}+\dfrac{26}{1110}=\dfrac{1247}{1110}$.

Ранее мы переводили бесконечные периодические дроби в обыкновенные по-другому, теперь, познакомившись с еще одним способом выполнения этого задания, мы можем выбрать для себя более удобный и применять его.

Как мы видим, расширяя свои возможности по работе с прогрессиями, мы применили эти знания при выполнении заданий, на первый взгляд не связанных с геометрической прогрессией. Такое часто случается в математике – открытия, сделанные в одном ее разделе, неожиданно находят применение в совсем других ее разделах.

К **624** Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 3$, $q = 2$.

625 Запишите пять первых членов геометрической прогрессии, первый член равен 36, а знаменатель равен 0,5. Ответьте на вопросы:

1) Как меняются члены этой прогрессии? Предположите, каким должен быть знаменатель геометрической прогрессии, чтобы ее члены бесконечно убывали. Приведите пример другой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2) Сравните задания:
«Найдите сумму первых пяти членов данной геометрической прогрессии».
«Найдите сумму всех членов данной геометрической прогрессии».
Какое из этих заданий вы пока не можете сделать?

3) Поставьте цель своей дальнейшей деятельности.

4) Что вы можете использовать для реализации поставленной цели?

626 Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: $21;\ 3\sqrt{7};\ 3;\ \dots$.

627 Найдите сумму $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$.

628 Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 75, а знаменатель равен 0,8.

629 Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен −24, а сумма равна −16.

630 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(2); б) 1,(23).

631 Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 27, а сумма первых трех ее членов равна 35. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

П **632** Найдите сумму первых четырех членов геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_5 = -312{,}5$; $q = 2{,}5$; б) $b_1 = \sqrt{5}$; $b_5 = 25\sqrt{5}$, $q < 0$.

633 Решите неравенство:

а) $\frac{(x-1)(x+3)}{(3x-6)} > 0$; б) $\frac{(2x-1)(3-x)}{x(x-6)} \leqslant 0$.

634 Решите неравенство:

а) $\frac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1$; б) $\frac{4(x-1)^2(2x+5)^5}{(3-x)^3x} > 0$; в) $\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x^2+x-12} \leqslant 0$.

Д **635** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: $36;\ 20;\ 11\frac{1}{9};\ \dots$.

636 Найдите сумму $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots$.

637 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(7); б) 3,(21).

638 Решите неравенство:

а) $\dfrac{3}{x^2-1} \geqslant 1$; б) $\dfrac{(5+x)^3(18-5x)^4}{9(x-2)^3x^2} \leqslant 0$; в) $\dfrac{(x+3)(x^2-3x+10)}{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

C **639*** В круг встали 15 мальчиков. Могло ли оказаться, что количество денег у любых двух ребят, стоящих через одного, отличается ровно на 5 рублей?

4*. Линейные рекуррентные соотношения

Главное – идти. Дорога не кончается, а цель – всегда обман зрения странника: он поднялся на вершину, но ему уже видится другая...

Антуан де Сент-Экзюпери (1900 – 1944), французский писатель

Изучая те или иные математические объекты, мы чаще всего идем от знакомства с частными их представителями к последующему рассмотрению их с более общей точки зрения. Так, например, мы изучали квадратичную функцию: сначала изучили ее простейшие случаи $y = x^2$, $y = ax^2$, после чего перешли к изучению более сложных: $y = ax^2 + h$ и $y = a(x-d)^2$. После чего мы обобщили все эти случаи, узнали, что все они являются примерами квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, и продолжили их изучение уже с этой точки зрения. Такой подход позволяет увидеть связи между изученными по отдельности объектами и выявить их новые свойства.

Таким же образом мы поступим и с прогрессиями. Рассматривая арифметическую и геометрическую прогрессии, мы имели дело с последовательностями, где каждый последующий член задается через предыдущий (сложением или умножением на одно и то же число) – это частные случаи линейного *рекуррентного соотношения первого порядка*. Введем соответствующее определение.

Определение 1. Рекуррентное соотношение $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$, называется **линейным рекуррентным соотношением первого порядка**.

Мы называем их соотношениями *первого* порядка, так как последующий член выражается через *один* предыдущий (выделяют и соотношения более высокого порядка, с ними мы познакомимся позже).

При $q = 1$ имеем: $x_{n+1} = x_n + d$, такое рекуррентное соотношение задает арифметическую прогрессию. При $d = 0$ имеем: $x_{n+1} = qx_n$, такое рекуррентное соотношение задает геометрическую прогрессию. Общий случай последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = qx_n + d$, часто называют **арифметико-геометрической прогрессией**.

Приведем примеры арифметико-геометрических прогрессий:

1) 1; 5; 13; 29... – ее члены получаются умножением предыдущего члена на 2 и увеличением полученного произведения на 3 ($x_{n+1} = 2\,x_n + 3$);

2) 2000; 900; 350; ... ее члены получаются умножением предыдущего члена на $\frac{1}{2}$ и уменьшением полученного произведения на 100 ($x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 100$).

Выведем формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии $x_{n+1} = qx_n + d$. Для этого попробуем сделать это, например, для такой последовательности (x_n): $x_{n+1} = -3x_n + 1$, $n = 1, 2, ...$; $x_1 = 5$.

Сначала рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = x_n + \alpha$ и подберем число α так, чтобы она была геометрической прогрессией. Так как $x_n = y_n - \alpha$, то рекуррентное соотношение запишется в виде: $y_{n+1} - \alpha = -3(y_n - \alpha) + 1$, т.е. $y_{n+1} = -3y_n + 4\alpha + 1$. Последовательность y_n будет геометрической прогрессией $y_{n+1} = -3y_n$ при $4\alpha + 1 = 0$. Значит, последовательность (y_n) будет геометрической прогрессией со знаменателем (-3), если $\alpha = -\frac{1}{4}$.

Для геометрической последовательности формула общего члена нам известна, воспользуемся ею. Тогда $y_n = y_1 \cdot (-3)^{n-1}$, где $y_1 = x_1 + \alpha = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$, тогда искомая формула общего члена последовательности (x_n) имеет вид

$$x_n = y_n - \alpha = \frac{19}{4}(-3)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 19(-3)^{n-1}}{4}.$$

Обобщим наши рассуждения. Чтобы получить формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии, заданной рекуррентно, можно рассмотреть вспомогательную последовательность $y_n = x_n + \alpha$, где α – некоторая постоянная величина. Затем выбрать α так, чтобы последовательность y_n была геометрической прогрессией. Так как $x_n = y_n - \alpha$, то рекуррентное соотношение запишется в виде: $y_{n+1} - \alpha = q(y_n - \alpha) + d$, т.е. $y_{n+1} = qy_n + \alpha(1 - q) + d$. Последовательность будет геометрической прогрессией со знаменателем q, если $\alpha(1 - q) + d = 0$, т.е. $\alpha = \frac{d}{q-1}$. Тогда $y_n = y_1 \cdot q^{n-1}$, значит, $x_n + \alpha = (x_1 + \alpha)q^{n-1}$. Окончательно получим следующую **формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии:**

$$x_n = \left(x_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1}.$$

В примерах пункта 3.1.1. подобные соотношения мы сначала угадывали по нескольким первым членам, затем доказывали методом математической индукции. Полученное только что соотношение вряд ли удастся угадать, но в любом случае попробуйте доказать эту формулу общего члена методом математической индукции. Рекомендуется также решить задачу из примера 3 п.3.1.1. изложенным только что методом.

Пример 1.

При каких значениях параметра a последовательность, заданная рекуррентно: $x_{n+1} = (a - 4)x_n + (4a^2 - 25a + 34)$, $x_1 = 3$, будет бесконечно убывающей геометрической прогрессией? Найти сумму этой прогрессии.

Решение.

Последовательность (x_n) будет геометрической прогрессией со знаменателем $q = a - 4$, если $4a^2 - 25a + 34 = 0$. Последнее квадратное уравнение имеет два корня: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{17}{4}$.

Знаменатели соответствующих геометрических прогрессий равны $q_1 = a_1 - 4 = -2$, $q_2 = a_2 - 4 = \frac{1}{4}$. Так как прогрессия бесконечно убывающая, то $|q| < 1$, то $q = \frac{1}{4}$.

Сумма этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{x_1}{q+1} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4.$$

Рассмотрим теперь линейное рекуррентное соотношение *второго порядка.*

Определение 2. Рекуррентное соотношение $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$, $q \neq 0$, называется **линейным однородным[1] рекуррентным соотношением второго порядка.**

Мы называем их соотношениями *второго* порядка, так как последующий член выражается через *два* предыдущих. Если заданы два первых члена, то общий член x^n определяется единственным образом. Примером такой последовательности является последовательность чисел Фибоначчи, с которой мы познакомились в п. 3.1.1.

* * *

Рассмотрим метод, позволяющий находить формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением второго порядка:

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n,\ q \neq 0, \qquad (1)$$

если x_1 и x_2 заданы ($x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$).

Будем искать последовательность (x_n), удовлетворяющую рекуррентному соотношению (1), в виде геометрической прогрессии: $x_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$ (λ – “лямбда” – буква греческого алфавита).

Имеем: $\lambda^{n+2} = p\lambda^{n+1} + q\lambda^n$. Так как $\lambda \neq 0$, то $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$. (2)

Полученное квадратное уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (1). Ограничимся случаем, когда это уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2 (т.е. когда $D = p^2 + 4q > 0$). В этом случае существуют две последовательности с общими членами $\lambda_1^{\,n}$ и $\lambda_2^{\,n}$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению (1), т.е.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^{\,n+2} &= p\lambda_1^{\,n+1} + p\lambda_1^{\,n} \\ \lambda_2^{\,n+2} &= p\lambda_2^{\,n+1} + p\lambda_2^{\,n} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Покажем, что любая последовательность вида $x_n = C_1\lambda_1^{\,n} + C_2\lambda_2^{\,n}$, где $C_1, C_2 \in R$ (линейная комбинация последовательностей $\lambda_1^{\,n}$ и $\lambda_2^{\,n}$) удовлетворяет рекуррентному соотношению (1).

В самом деле, применяя равенство (3), получим:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= C_1\lambda_1^{\,n+2} + C_2\lambda_2^{\,n+2} = C_1(p\lambda_1^{\,n+1} + p\lambda_1^{\,n}) + C_2(p\lambda_2^{\,n+1} + p\lambda_2^{\,n}) = \\ &= p(C_1\lambda_1^{\,n+1} + C_2\lambda_2^{\,n+1}) + q(C_1\lambda_1^{\,n} + C_2\lambda_2^{\,n}) = px_{n+1} + qx_n. \end{aligned}$$

Если удастся подобрать постоянные C_1 и C_2 такие, что $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, то последовательность $x_n = C_1\lambda_1^{\,n} + C_2\lambda_2^{\,n}$ удовлетворяет соотношению (1) и данным *начальным условиям* $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$. А так как такая последовательность определена единственным образом, то она и будет искомой.

Имеем: $x_1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \alpha$, $x_2 = C_1\lambda_1^{\,2} + C_2\lambda_2^{\,2} = \beta$. Нужно доказать, что система уравнений $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \alpha$, $C_1\lambda_1^{\,2} + C_2\lambda_2^{\,2} = \beta$ имеет единственное решение относительно неизвестных C_1, C_2 (величины λ_1, λ_2, α,β фиксированы). Решаем эту систему:

$C_2 = \frac{\alpha - C_1\lambda_1}{\lambda_2}$ (так как $q \neq 0$, то корни уравнения (2) не могут равняться 0). Подставляя C_2 во 2-е уравнение системы, получим уравнение относительно C_1:

$C_1\lambda_1^{\,2} + \frac{\alpha - C_1\lambda_1}{\lambda_2}\lambda_2^{\,2} = \beta$, т.е. $C_1(\lambda_1^{\,2} - \lambda_1\lambda_2) = \beta - \alpha\lambda_2$, (мы учли, что $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Тогда $C_2 = \frac{1}{\lambda_2}\left(\alpha - \frac{\beta - \alpha\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \frac{\alpha\lambda_1 - \beta}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}$, $C_1 = \frac{\beta - \alpha\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}$.

[1] В данном случае термин «однородное» указывает на то, что если данному рекуррентному соотношению удовлетворяет некоторая последовательность x_n, то и последовательность Cx_n при любом C тоже удовлетворяет этому соотношению.

Итак, система уравнений имеет единственное решение (C_1; C_2); полученная последовательность $x_n = C_1\lambda_1{}^n + C_2\lambda_2{}^n$ является искомой.

Пример 2.

Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:
$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Оно имеет два корня $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тогда при любых $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$ последовательность $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$. Найдем теперь C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям $x_1 = 0$, $x_2 = 1$:

$2C_1 + 3C_2 = 0$, $4C_1 + 9C_2 = 1$. Решая эту систему, получим: $C_1 = -\dfrac{1}{2}$, $C_2 = \dfrac{1}{3}$, т.е. $x_n = -\dfrac{2^n}{2} + \dfrac{3^n}{3}$, $n = 1, 2, \ldots$. Равенство это можно переписать в виде $x_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ (напомним, что $2^0 = 3^0 = 1$ по отдельному определению).

Таким же образом можно найти и формулу общего члена последовательности Фибоначчи. Так как характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, и корнями его являются числа $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, то этим и обусловлен столь на первый взгляд экзотический вид формулы общего члена (п.3.1.1.). Довести до конца расчет рекомендуется самостоятельно.

Случаи, когда характеристическое уравнение (2) имеет единственный корень или не имеет корней, мы пока рассматривать не будем.

Отметим, что аналогично можно рассмотреть линейные однородные рекуррентные соотношения более высоких порядков. Например, линейное однородное рекуррентное соотношение третьего порядка имеет вид $x_{n+3} = px_{n+2} + qx_{n+1} + rx_n$, $r \neq 0$, и для однозначного определения последовательности нужно задать три начальных условия: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$. Если характеристическое уравнение $\lambda^3 - p\lambda^2 - q\lambda - r = 0$ имеет три различных корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то искомая последовательность ищется в виде $x_n = C_1\lambda_1{}^n + C_2\lambda_2{}^n + C_3\lambda_3{}^n$, где числа C_1, C_2, C_3 однозначно определяются из начальных условий: $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3 = \alpha$, $C_1\lambda_1{}^2 + C_2\lambda_2{}^2 + C_3\lambda_3{}^2 = \beta$, $C_1\lambda_1{}^3 + C_2\lambda_2{}^3 + C_3\lambda_3{}^3 = \gamma$.

К **640** Последовательность задана рекуррентно $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$.

1) Вспомните обозначения для арифметической и геометрической прогрессии и назовите, из каких компонентов этих прогрессий составлено равенство?

2) Исследуйте данную последовательность для $q = 1$. Какой вывод вы можете сделать?

3) Исследуйте данную последовательность для $d = 0$. Какой вывод вы можете сделать?

4) Как можно назвать соотношение $x_{n+1} = qx_n + d$, $q \neq 0$ и последовательность, которую оно задает? Сравните свое предположение с учебником на стр. 163.

641 Найдите формулы общего члена последовательностей, заданных рекуррентно:

а) $x_{n+1} = 2x_n + 2$, $x_1 = 0$; б) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1$, $x_1 = 50$.

П **642** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 36$; $b_4 = 16$.

643 Докажите неравенство:

а) $a(a - b) \geqslant b(a - b)$; б) $x + \dfrac{9}{x} \geqslant 6$, при $x > 0$.

644 Докажите неравенство:

$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, если $a + b \geqslant 0$.

645 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2 + 5x + 100}$ при $x > 0$.

D **646** Найдите формулы общего члена последовательностей, заданных рекуррентно:

а) $x_{n+1} = -x_n + 1$, $x_1 = 1$; б) $x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + 3$, $x_1 = 81$.

647 Четвертый член геометрической прогрессии в 4 раза больше ее первого члена. Во сколько раз десятый член этой прогрессии больше четвертого?

648 Докажите неравенство:

а) $c(c + b) \geqslant b(c - b)$; б) $n + \frac{16}{n} \leqslant -8$, при $n < 0$.

C **649*** Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно:

$x_{n+1} = 7x_{n+1} - 12x_n$, $x_1 = 1$, $x_1 = 2$.

650* Докажите, что для членов последовательности Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) справедливо тождество: $F_n^{\ 2} + F_{n+1}^{\ 2} = F_{2n+1}$.

Экспресс-тест № 5

Примерное время выполнения – 50 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них – геометрическая прогрессия. Укажите ее.

А) 3; 9; 15; 21; ...; В) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; ...$;

Б) 3; 9; 27; 81; ...; Г) $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; ...$.

№ 2

№ 2. Найдите четвертый член геометрической прогрессии $-18; 6; ...$.

А) $\frac{2}{3}$; Б) $-\frac{2}{3}$; В) 1; Г) -1.

№ 3

№ 3. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой восьмой член равен 12, а двенадцатый член равен -8?

А) существует; Б) нет; В) нельзя дать однозначный ответ.

Часть В

№ 4

№ 4. Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвертого ее членов равна -20. Найдите сумму шести первых членов прогрессии.

А) 126; Б) -42; В) -44; Г) -48.

№ 5

№ 5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $x_1 = -2$, $q = \frac{3}{4}$.

А) 0,5; Б) −0,5; В) −8; Г) 8.

№ 6

№ 6. Числа 25; $10t$; 5 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите число t, при условии, что $q > 0$.

А) $2{,}5\sqrt{5}$; Б) $5\sqrt{5}$; В) $2\sqrt{5}$; Г) $0{,}5\sqrt{5}$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 7. Найдите шестой и десятый члены геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Б	А	Б	Б	В	Г

№ 7

1) Так как числа x_6, x_{10}, x_{14}, x_2 – члены одной геометрической прогрессии, то выполняется условие:

$$\begin{cases} x_6 + x_{10} = 16 \\ x_{14} \cdot x_2 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1q^5 + x_1q^9 = 16 \\ x_1q^{13} \cdot x_1q = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1q^5 + x_1q^9 = 16 \\ x_1q^5 \cdot x_1q^9 = 60 \end{cases}$$

2) Введем новые переменные: пусть $a = x_1q^5$, $b = x_1q^9$. Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 16 \\ a \cdot b = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 6 \\ b = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 10 \\ b = 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

3) Значит, $x_6 = 6$, $x_{10} = 10$ или $x_6 = 10$, $x_{10} = 6$.

Ответ: $x_6 = 6$, $x_{10} = 10$ или $x_6 = 10$, $x_{10} = 6$.

Шкала успешности:

7 – 9 баллов – *отлично*

5 – 6 баллов – *хорошо*

4 балла – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к главе 3

651 а) Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия. Выразите a_{12} через a_6 и d.
б) Последовательность (a_n) – геометрическая прогрессия. Выразите a_{12} через a_6 и q.

652 а) В арифметической прогрессии (c_n) известно, что $c_2 = -12$, $d = 0{,}5$. Найдите c_1 и сумму первых трех членов.
б) В геометрической прогрессии (c_n) известно, что $c_2 = -12$, $q = 0{,}5$. Найдите c_1 и сумму первых трех членов.

653 а) Является ли членом арифметической прогрессии (b_n) число 26,3, если $b_1 = 52$ и $d = 2{,}1$?
б) Является ли членом геометрической прогрессии (b_n) число 2^6, если $b_1 = 0{,}5$ и $q = 2$?

654 Последовательность задана рекуррентно:
а) $b_1 = -2$; $b_{n+1} = b_n - 3$;
б) $b_1 = -2$; $b_{n+1} = -3b_n$;
Задайте последовательность формулой n–го члена и найдите сумму 5 ее членов.

655 а) Даны последовательные члены арифметической прогрессии: $x - 4$; x^2; $x + 16$. Найдите x.
б) Даны последовательные члены геометрической прогрессии: $x - 3$; $\sqrt{5x}$; $x + 16$. Найдите x.

656 В арифметической прогрессии первый член $a_1 = 16$, разность $d = -4$. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равна -324?

657 Полугодовое обучение на курсах экстремального вождения можно оплатить сразу либо оплачивать по частям (ежемесячно). Стоимость курсов при единовременной оплате составляет 60 000 рублей. Сколько можно сэкономить, оплатив курсы сразу, если в случае выплаты по частям оплата за первый месяц составляет 10 000 рублей, а оплата каждого следующего месяца увеличивается на 20% от: а) от первоначальной выплаты; б) от предыдущей выплаты?

658 Найдите сумму первых двадцати одного членов арифметической прогрессии, если сумма седьмого и тринадцатого членов равна 21, а разность суммы восьмого, двенадцатого членов и пятнадцатого члена данной прогрессии равна 3.

659 Разница пятого и третьего членов геометрической прогрессии равна 1200, а разница пятого и четвертого члена равна 1000. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.

660 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:
а) 0,(23); б) 0,58(3).

10. а) {2}; б) {0,5}; в) {−2}; г) {−0,4}. **11.** а) (2; −7); б) $\left(-\frac{1}{8}; -\frac{7}{8}\right)$; в) (6; 0), (2;−2). **12.** а) {−0,4; 0,4}; б) {−0,25;0,25}; в) {−7; 0,5}; г) {−6; 3}. **13.** 12 ч и 18 ч. **14.** −4; −2; $-3 \pm \sqrt{7}$. **18.** а) (−6; 0); б) (−2; 1). **19.** а) {−5; 1,5}; б) {−4; 10}. **20.** 10 мин. **38.** 25. **39.** Синяя ручка, оранжевый карандаш, красный ластик. **40.** Философов больше. **42.** а) 0,5; б) 1,12; в) −0,4. **43.** а) $\frac{a(a-b-c)}{2}$; б) 2. **44.** −0,75. **45.** $7\frac{26}{27}$. **46.** а) 60 км/ч; б) 5 км/ч. **48.** (2;3,5]; б) $(-\infty;2)$. **49.** а) [1; 7]; б) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; в) $(0;1\frac{1}{7})$; г) $(\frac{11}{16};+\infty)$. **50.** а) $(-\infty;\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$; б) $(-\infty;-\sqrt{11})\cup(-\sqrt{11};\sqrt{11})\cup(\sqrt{11};+\infty)$; в) $(-\infty;-12)\cup(-12;-1)\cup(-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. **52.** В 14 часов. **53.** $\frac{1}{m-7}$. **61.** а) $\frac{m}{8}$; б) $\frac{1}{a-3}$; в) $\frac{b-6}{b-4}$. **62.** а) 4; б) $\{0; \frac{-9\pm2\sqrt{3}}{3}\}$; в) {−1; 1}; г) {−2; −0,125}; д) {−1; 1}; е) {1; 3}. **63.** 500 метров. **64.** 3. **65.** 1) «Натуральное число a делится на 3 или оно оканчивается на 3»; «Сумма цифр натурального числа a делится на 3, либо оно оканчивается на 3»; 2) « Неверно, что натуральное число a делится на 3 или оно оканчивается на 3»; «Натуральное число a не делится на 3 и оно не оканчивается на цифру 3». **68.** а) $\frac{1}{9a^2}$; б) $\frac{c+4}{c^2-4c+16}$; в) $\frac{d+3}{d+10}$. **69.** а) {−2; 8}; б) $\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}; \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\}$. **70.** 1 км. **71.** 1) «Натуральное число m делится на 5 и на 9»; «Натуральное число m делится на 45»; 2) «Неверно, что натуральное число m делится на 5 и на 9»; «Натуральное число m делится на 5 или на 9». **72.** Все конфеты будут у Деда Мороза. **85.** 1) при $x=-8$, $x=-3$; 2) при $x=-10$, $x=-1$; 3) таких x не сущ.; 4) при $x=-7$, $x=-2$. **86.** ±6. **87.** −1; 8; $\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}$. **88.** 448 км. **90.** а) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$; б) $(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty)$; в) $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. **94.** 56 км. **97.** 6; 1. **98.** 2) 24. **99.** 90 720. **100.** 6 720. **101.** 84. **103.** 8 при $x=4$. **104.** $4\sqrt{5}+9$ при $x=2\sqrt{5}$. **106.** а) −2; б) −1; 2; в) −5; −2; г) −1; 0; 1; д) ∅; е) −2; −1. **108.** 6. **109.** (1; 2; 3). **113.** 4. **114.** а) 1; б) −5,25; 0; в) −3; 1. **117.** а) 120; б) 60. **118.** 1) 120; 2) 60; 3) 20. **119.** 1) 96; 2) 48; 3) 16. **120.** перестановки: а, размещения: б, в. **121.** 120, 336. **122.** 30; 360. **123.** 1 728 000. **124.** 30 240; 90. **126.** чётные а, г; нечётные: б, в. **127.** а) $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}$; $f(-a)=a^2$; $f(a+5)=a^2+10a+25$; б) $f(-2)=8$; $f(-a)=a^3$; $0,2\cdot f(a^2)=-0,2a^6$; в) $f(0)$ не существует; $f(0,1a)=\frac{1000}{a^3}$; $\frac{1}{f(a^3)}=a^9$; г) $f(-4)$ не существует; $f(0)=0$; $f(100)=10$; $f((a-1)^2)=|a-1|$. **130.** а) (−1; −5); б) (0; 2); в) (1; 1); (0,25; 0,5); г) (−16; 4); (−4; 2). **131.** 120. **132.** 2730. **133.** а) (2; − 1); (−1; 2); б) (2; 3). **134.** $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{16}$; $3\sqrt{2}$. **136.** Да, нет, да, нет, да. **137.** Да, нет. **139.** а) 1365; б) 15015. **140.** $\frac{n(n-1)}{2}$. **141.** 120. **142.** а) 72 с; б) 105 с; в) 96 с. **143.** 462. **144.** 3003. **145.** 2970. **146.** Делящихся на 11, но не делящихся на 13 больше. **147.** 24, 4, 6. **148.** 6; 120. **149.** а) больше; б) меньше; в) больше; г) больше. **150.** а) 1; б) $\sqrt{5}-1$; в) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; г) $\sqrt{5}-1$; д) 1; е) 2; ж) $2\sqrt{2}$; з) $2\frac{2}{3}$. **153.** 21. **154.** 210. **155.** 1200. **156.** а) 3 628 800; б) 210; в) 5040. **157.** а) −17; б) $\sqrt{19}-4$; в) 1; г) 3. **158.** а) {0; 8}; б) $\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{2}}{2}$; в) {−6; 6}; г) {10}. **175.** а) {−13; 2}; б) {−29; −3}; в) ∅. **176.** $x^2-29x+163=0$. **177.** а) $5\frac{1}{3}$; б) −10. **178.** $x=1-\sqrt{5}$; $c=-4$. **179.** а) $(x+1)(x+12)$; б) $-1,2(x-5)\left(x+\frac{5}{6}\right)$; в) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; г) нельзя. **180.** а) 7 см и 24 см; б) 9 см, 12 см, 15 см. **181.** $(9; +\infty)$. **182.** −2; 0; $\frac{2}{3}$. **183.** $m = 2$. **191.** {−16; −2}; б) {−7; 13}; в) ∅. **192.** 29. **193.** а) $(x + 9)(x - 2)$; б) $(2 - 3x)(3x + 1)$; в) $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$; г) нельзя. **194.** 18 м; 20 м. **195.** $(-\infty; -16)$. **196.** $-\frac{1}{3}$; 0; 1. **211.** а) $\sqrt{2}$; б) 0,25. **212.** а) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; в) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **213.** а) $(-\infty;-1)\cup(5; +\infty)$; б) $(-\infty;-4]\cup[0; 1]$; в) (−8; 8);

г) $(-2;\ 0)\cup(0;\ 3)$; д) $(-3;\ 4)$; е) $[-0{,}6;\ 1]$; ж) $(-\infty;-1)\cup(1;\ 2]$; з) $\left(-2;\ -\frac{1}{6}\right)\cup(0{,}5;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$. **214.** $\left(-1;\ \frac{1}{6}\right)$. **215.** $)(-2;3)\cup[4;5)$. **216.** 8 км/ч. **220.** 48. **221.** 15120. **222.** $\frac{1}{969}$. **223.** а) 3; б) $\frac{3}{2\sqrt{11}}$. **224.** а) $(-9;-7)$; б) $[-3;0)\cup(1;7]$; в) $(-\infty;\ -10)\cup(10;\ +\infty)$; г) $(3;\ 6)$; д) $(-\infty;-4)\cup(5;\ +\infty)$; е) $[-1;\ 1)\cup\{7\}$. **225.** $\left[-1;\ \frac{3}{7}\right]$. **226.** 9 км/ч. **236.** а) $[0;\ 8]$; б) $(-\infty;-1]\cup[0{,}8;\ +\infty)$; в) $(-\infty;-1{,}5)\cup(-1{,}5;\ +\infty)$; г) $\{5\}$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $\varnothing$. **237.** $(-1;\ 1]$. **238.** а) $[-7;\ -5)\cup(0;\ 3]$; б) $[5;\ 11)$; в) $[5;\ 7)$. **239.** $(d-7)^2-(d-8)(d-6)=1>0$. **240.** 220 км. **244.** 27405 способами. **245.** а) $[6;\ 12]$; б) $\varnothing$; в) $\{13\}$; г) $(-\infty;\ +\infty)$. **246.** $(-\infty;-4]\cup[4;\ +\infty)$. **247.** а) $[3;\ 17)$; б) $[-9;\ -8)$. **248.** $(p-13)^2-(d-10)(d-16)=9>0$. **249.** 350 км. **251.** а) 24; б) 420. **252.** а) 5040; б) 45360; в) 39916800. **253.** 303600. **254.** 120. **255.** 657800. **256.** 96. **257.** $\frac{7}{30}$. **258.** 0,995. **259.** 0,1. **260.** $\frac{12}{35}$. **261.** $\approx 0{,}11$. **262.** а) $(29;\ -17)$; б) $(-1{,}5;\ -2)$; в) $(0;\ -3)$. **263.** а) $(-1,\ 5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\sqrt{5})\cup(3;10)$; в) $(-\infty;-5]$. **264.** $\left[-1\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$. **266.** 6,5; $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$. **267.** а) 9; б) 8; в) $18-2\sqrt{77}$; г) -11; д) $4-\sqrt{5}$; е) $1-\sqrt{2}$. **268.** $(9-x)\sqrt{2}$. **269.** а) -5; 15; б) 0; $\frac{3}{7}$; в) 6; г) $\varnothing$; д) -33; 3; е) $-\sqrt{51}\pm 5$. **270.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) ± 3; ± 5. **271.** а) $2(x-5)(x+0{,}5)$; б) нельзя разложить. **272.** 5. **273.** $m=-1$, $m=2$. **274.** $x=2$. **275.** а) $\left(-\infty;-\frac{4}{7}\right]\cup\left[\frac{4}{7};+\infty\right)$; б) $[-1{,}6;0]$; в) $(-\infty;1)\cup(18;+\infty)$; г) $\varnothing$; д) $\left\{1\frac{2}{3}\right\}$; е) $(-\infty;+\infty)$; ж) $[-5;6]$; з) $(-\infty;-9]\cup[0;8]$; и) $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(7;+\infty)$. **276.** а) $(-\infty;-4)\cup(0;1)\cup(8;+\infty)$; б) $(-1;2]\cup\{7\}$; в) $(-2;0)\cup(2;4)$. **277.** а) $\left[-1\frac{1}{3};1\right]$; б) $(-\infty;-1{,}5)\cup(-1;+\infty)$; в) $(-4;-1)\cup\left[1;1\frac{1}{3}\right]$. **278.** а) $(1;4)$; б) $(-2;-1]\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$; в) $(-10;-7)\cup\{0\}$. **281.** а) 4; б) 0; в) -3; 2; $\frac{1\pm\sqrt{151}}{2}$; г) -4; -2; -1; 1. **282.** $\frac{1}{a}$. **284.** 9 км. **285.** 12 км/ч. **286.** 60 км/ч. **288.** $\frac{19}{13}$. **305.** а) да; б) да; в) да. **306.** а) $[5;8]$; б) $(-\infty;-6]\cup(6;+\infty)$. **307.** а) $(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{2}{7}\right)\cup\left(\frac{2}{7};+\infty\right)$; б) $(-\infty;2)\cup(2;4)\cup(4;+\infty)$. **308.** а) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ 3\right)\cup(3;\ +\infty)$. **309.** а) $y_{наим}=-5$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб}=6{,}125$; в) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб}=0$. **310.** а) $(-0{,}125;\ -0{,}875)$; б) $(2;\ -7)$. **311.** (3). **312.** -4. **317.** а) $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -7)\cup(-7;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ -3)\cup(-3;\ +\infty)$. **318.** а) $y_{наим}=6{,}75$; $y_{наиб}$ не существует; б) $y_{наим}$ не существует; $y_{наиб}=5{,}25$; в) $y_{наим}=0$; $y_{наиб}$ не существует. **319.** а) $(2;\ 1)$; б) $(-4;\ 3)$. **320.** -10. **321.** $S=50$. **323.** $(-\infty;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **324.** $(-5;\ 3)$. **325.** а) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 0{,}4)\cup(0{,}4;\ +\infty)$; г) $(-\infty;2)\cup(2;\ +\infty)$. **326.** 3. **327.** $[2;\ +\infty)$. **329.** между $x\in[-7;\ 7]$ и $y\in[5;9]$. **332.** $[42;72)$. **333.** а) $[1;30)$; б) $(-7;0)$; в) $\left(1\frac{1}{3};10\right)$. **334.** $(-0{,}4;1)$. **335.** $[-3;-2{,}5)\cup(2{,}5;4]$. **336.** а) $(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ +\infty)$, г) $(-\infty;2)\cup(2;\ +\infty)$. **337.** $[2;\ +\infty)$. **339.** $[0;\ 1{,}8]$. **340.** 3 числа. **344.** а) $(-3;\ 5)$; б) $(-\infty;\ -\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **345.** (а). **346.** а) $(-\infty;\ 2]$; б) $(-\infty;0]$; в) $[0;\ +\infty)$. **347.** а) 120; б) 90720. **348.** 1680; 336; 56. **349.** $5\cdot 5\cdot 4=100$ или $A_6^3-A_5^2=100$; $5\cdot 5=25$ или $A_6^2-A_5^1=25$. **350.** 24310. **351.** $a<0$, $b<0$ и $c<0$. **352.** $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$; $m\in[-1;\ 0)$. **353.** При $a=0$, $a=2$. **354.** $(-5;1)$, $(5;1)$. **355.** 1. **356.** а) $(-\frac{5}{3};1)$; б) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$; в) $(-2;1)\cup(1;3)$; г) $(0;4)$. **357.** а) $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right]$; б) $(-\infty;3]$; в) $(-\infty;+\infty)$. **358.** а) 720; б) 360. **359.** 455. **360.** $a>0$, $b>0$ и $c>0$. **361.** $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; $m\in[0;\ 1)$. **363.** $a>\frac{1}{\sqrt{5}}$. **367.** а) верно; б) не верно; в) верно; г) верно. **368.** а) ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная; г) четная. **369.** а) верно; б) верно; в) верно; г) не верно. **370.** (б), (в). **371.** $T=0{,}2$. **373.** 1) $D(y)=[-5;\ 5]$; 2) $E(y)=[-1;\ 9]$;

3) $y>0$ при $x\in[-5;-2)\cup(-2;4)$; $y<0$ при $x\in(4;5]$; 4) функция убывает при $x\in[-5;-2]$, при $x\in[0;5]$. **375.** -1. **376.** а) $(11;14]$; б) $[1;2\frac{2}{3}]$. **377.** а) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; б) $[-0{,}8;1{,}2]$. **378.** $\frac{1}{16}=0{,}0625$. **379.** $\frac{203}{494}$. **380.** а) верно; б) не верно; в) верно. **381.** а) нечетная; б) ни четная, ни нечетная; в) четная; г) нечетная. **382.** (б), (в). **383.** 1) $D(y)=[-5;7]$; 2) $E(y)=[-9;0]$; 3) $y>0$ при $x\in\varnothing$; $y<0$ при $x\in[-5;-2)\cup(-2;7)$; 4) функция возрастает при $x\in[-5;-2]$, при $x\in[0;7]$. **384.** $\frac{7}{19}$. **385.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{2}{3}$. **386.** $(9;+\infty)$. **387.** а) $(-\infty;0{,}5]\cup[1;+\infty)$; б) $\left(-1;\frac{3}{7}\right)$. **388.** -31. **389.** $a\geqslant1$. **393.** а) 2; б) 6; в) 3,75; г) 11; д) 15; е) 6. **394.** а) $2\sqrt7$; б) $2\sqrt3$; в) $4\sqrt6$; г) $\sqrt{31}$. **395.** а) $\frac{19}{25}$; б) $\sqrt2$; в) $8-4\sqrt3$. **396.** а) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$; б) $[-8;2)$; в) $(-\infty;-0{,}25)\cup[0;2)$. **397.** 4. **399.** а) 21; б) $\sqrt6-2$; в) $8+2\sqrt{15}$; г) $3+3m^2$. **400.** 6,6; $2\sqrt{11}$; $4\sqrt3$. **401.** 5. **402.** При $x=0$. **409.** а) 9; б) 7; в) $\frac{\sqrt7}{7}$. **410.** а) $\sqrt x+7$; б) $a+9b$; в) $-\sqrt{5t}$; г) $\sqrt c-1$; д) 8; е) $\frac{16\sqrt b}{b-16}$. **411.** $8-\sqrt5$. **412.** Между 10 и 11. **413.** $(-\infty;2)$. **417.** а) 7; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\sqrt{1\frac{2}{3}}$. **418.** а) $\sqrt v-4$; б) $p+4q$; в) $-\sqrt{30k}$; г) $\sqrt w-4$; д) 4; е) $\frac{10}{x-25}$. **419.** 7 и 8. **420.** $8+\sqrt3$. **421.** $[-1;+\infty)$. **422.** $x>0$, $y<0$. **426.** $(2-\sqrt5)\sqrt{9+4\sqrt5}=(2-\sqrt5)\sqrt{(\sqrt5)^2+2\cdot2\cdot\sqrt5+2^2}=$ $=(2-\sqrt5)\sqrt{(\sqrt5+2)^2}=(2-\sqrt5)(2+\sqrt5)=-1$. **428.** а) $\frac{\sqrt3}{9}$; б) 0; 13; в) $\pm\sqrt{6{,}5}$; г) $-1\frac{4}{7}$; 1; д) $-2\frac{2}{3}$; $-0{,}125$; е) $-3\frac{1}{58}$; 1. **429.** $x^2-10\sqrt2x+43=0$. **430.** а) 0; б) -10; в) 10; г) 12. **431.** а) $\{0;12\}$; б) $\varnothing$; в) $\{2;2{,}8\}$; г) $\varnothing$. **434.** а) $-\frac{\sqrt{51}}{3}$; б) 0; 13; в) $\pm0{,}5\sqrt{55}$; г) -1; $\frac{9}{13}$; д) $-1\frac{2}{3}$; 8. **442.** а) $\{3;1\}$; б) $\varnothing$; в) $\{3\}$; г) $\{1;-5\}$. **443.** а) 0; 0,5; б) 3; 4. **444.** 5 дней и 20 дней. **448.** а) $\{1;5\}$; б) $\varnothing$; в) $\{3\}$. **449.** 0,5. **450.** 20 листов в день и 24 листа в день. **453.** в, г. **455.** а) x^2; б) $\frac{4}{x^2}$; в) $4-4x+x^2$; г) $2x^2$; д) x^4; е) $81x^4$. **456.** а) $(3;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$; д) $(-\infty;+\infty)$. **457.** а) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $[0;+\infty)$; г) $[0;+\infty)$; д) $(0;+\infty)$. **458.** а) четная; б) ни четная, ни нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная; д) нечетная; е) ни четная, ни нечетная. **459.** 4. **460.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **462.** 0. **463.** а) $\{-3;3\}$; б) $\{-5;5\}$. **467.** а) 18; 27; 36; 45; 54; б) $\frac{19}{20}$; $\frac{19}{21}$; $\frac{19}{22}$; $\frac{19}{23}$; $\frac{19}{24}$; в) 4; 11; 18; 25; 32. **468.** а) 4; 3; 2; 1; б) 2; 2,5; $3\frac{1}{3}$; 4,25. **471.** 1) а) да; $n=5$; б) нет. **474.** $a_1=1000$; $a_{n+1}=1000+0{,}04(12000-1000n)$; 2640 руб. **475.** 1) а) $-\frac{3y+x}{x}$; б) $\frac{3x-1}{x}$; 2) а) $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ и $\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$; б) $\frac{3a^3}{36a^2(a^2-b^2)}$ и $\frac{2ab+2b^2}{36a^2(a^2-b^2)}$. **476.** $\frac{1}{2x(x-1)}$. **477.** а) $\frac{x^2+x}{2x-2}$; б) $\frac{3a^3+3a^2}{a+2}$. **478.** а) $\frac{10x+8}{x^2-3x+2}$; б) $2a$. **479.** а) 4; 7; 10; 13; б) 1,25; $\frac{25}{9}$; $\frac{125}{16}$; 25. **481.** Да. $n=15$. **484.** $\frac{1}{x-1}$. **485.** 9. **490.** а) строго возрастает; б) нестрого возрастает, строго возрастает со 2 номера; в) строго возрастает. **491.** а) и в). **493.** а) $3\frac{1}{3}$; б) 6; в) $8\frac{1}{3}$; г) 53; д) $4+\frac{1}{3}k$. **494.** $x-4$; $2x^3+x-6$. **495.** а) строго убывает; б) нестрого возрастает с 5 номера, строго возрастает с 6 номера; в) строго возрастает. **496.** (а). **497.** x^2+3. **499.** 2001. **502.** 1,5; 1,1; 0,7; 0,3. **504.** а) 7,4; б) 20; в) 23,6. **505.** а) $a_8=a_1+7d$; б) $a_{14}=a_5+9d$. **506.** а) -3; б) 6. **507.** а) -1; б) 1. **508.** $d=0{,}4$; $a_{150}=61{,}4$. **509.** 123; 231. **510.** а) $18-4(n-1)$; б) $2\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(n-1)$. **511.** $x_n=-7+2(n-1)$; $x_7=5$. **512.** 15. **513.** -1. **514.** -4. **515.** Не могут. **516.** 10,5. **517.** $x_n=26-3(n-1)$; $x_5=14$. **518.** а) $a_1=5$, $d=2{,}5$; б) если $d=4$, то $a_1=-3$; если $d=-5{,}75$, то $a_1=55{,}5$. **519.** а) да; б) нет; в) да; г) да. **520.** -3; 0; 60; $k(k-4)$; k^2-4. **522.** а) $\{7\}$; б) $\{3\}$; в) $\{-7\}$. **523.** а) $\{3\pm\sqrt{15};1;-6\}$; б) $\{-32\}$. **524.** $c_5=0{,}5$; $c_{23}=-4$: $c_{k+4}=0{,}75-0{,}25k$. **525.** $2\frac{1}{12}$. **526.** 25. **527.** 44. **528.** $-0{,}3$. **529.** Не могут. **530.** -2; 0; 70; k^2-3k; k^2+3k. **531.** а) $\{-2\}$; б) $\{-3\}$. **533.** Пять (5, 11, 17, 23, 29). **540.** 64,8. **541.** -3340. **542.** 446,4. **543.** а) 250500;

б) 6545; в) 2700. **544.** 18. **545.** 20. **546.** а) 195; б) 505; в) 32,5. **547.** $d=-1\frac{7}{9}$; $a_{13}=-12\frac{1}{3}$. **548.** $a_1=54{,}8$; $a_9=22{,}8$. **549.** -198. **550.** а) можно, $S_{10}=50$; б) нельзя. **551.** а) $b_n=-3n+4$; $S_5=-25$. **552.** Да, $n=12$. **553.** 0 и 2. **554.** а) $a^4+4a^4(n-1)$; б) $(10-a)-2(n-1)$. **555.** $d=\pm4$, т.е. получается две последовательности: 1) при $d=4$, $a_1=-6$; 2) при $d=-4$, $a_1=18$. **556.** а) 15 км/ч, 18 км/ч; б) 16 км/ч. **557.** 250976. **558.** 1628. **559.** 37. **560.** 1330. **561.** 45. **562.** 583. **563.** Нет. **564.** 0 и 5. **565.** 30 км/ч. **572.** -2; 6; -18; 54. **573.** а) $-0{,}008$; б) $-0{,}2$; в) 25; г) $\frac{1}{625}(-5)^{k-1}$. **574.** 36. **575.** $q=-2$; $b_5=\frac{1}{16}$. **576.** а) $a_5=a_1q^4$; б) $a_7=a_4q^3$. **577.** а) 3,375; б) -1. **578.** 4 или -4. **579.** $x_n=1{,}5\cdot(-2)^{n-1}$; $x_7=-96$. **580.** $100\cdot4^5=102400$. **581.** 3. **582.** 5. **583.** 2 или -2. **584.** Не является. **585.** 800. **586.** $d=0{,}5$, $a_{15}=4$. **587.** $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; б) $[-4;2]$; в) $(-\infty;1{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **588.** 384. **589.** -24. **590.** 0,5. **591.** 6 или -6. **592.** $x_n=160\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $x_7=2{,}5$. **593.** $-\frac{1}{3}$; 4. **594.** 1 или -1. **595.** 4 и 16. **596.** Не является. **597.** 1050. **598.** $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$; б) $(-3;-1)$; в) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; г) $(-\infty;+\infty)$. **599.** 74. **602.** 1. **603.** $443\frac{1}{3}$. **604.** 2186. **605.** 684. **606.** 3069. **607.** $b_n=-\frac{1}{3}(-3)^n$; $S_5=-61$. **608.** $x_1=20000$; $q=1{,}05$; $n=5$. **609.** 10. **610.** $\{24;36;54\}$ и $\{-24;36;-54\}$. **611.** $q=3$, $b_1=5$. **612.** а) $(-\infty;-8)\cup(3;+\infty)$; б) $(-8;3)\cup(3;+\infty)$; в) $(3;+\infty)$. **613.** а) $[2;4]$; б) $[2;+\infty)$; в) $(-\infty;4]$. **614.** $-29\,523$. **615.** 125. **616.** 2046. **617.** -1640. **618.** 63 или 189. **619.** Если $q=3$, то $b_1=\frac{2}{3}$; если $q=-3$, то $b_1=-\frac{28}{39}$. **620.** 24310 рублей, 110513 рублей. **621.** а) $(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$; б) $(-\infty;-1]$; в) $(5;+\infty)$. **622.** 57. **623.** Не может. **626.** $3{,}5(7+\sqrt{7})$. **627.** 0,5. **628.** 15. **629.** $-1{,}5$. **630.** а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{122}{99}$. **631.** $x_1=45$; $q=-\frac{2}{3}$. **632.** а) -203; б) $-\frac{24\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$. **633.** а) $(-3;1)\cup(2;+\infty)$; б) $(-\infty;0)\cup[0{,}5;3]\cup(6;+\infty)$. **634.** а) $[-1;1)\cup(1;3]$; б) $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;3)$; в) $(-\infty;-4)\cup[2;3)$. **635.** 81. **636.** 0,25. **637.** а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{106}{33}$. **638.** а) $[-2;-1)\cup(1;2]$; б) $[-5;0)\cup(0;2)$; в) $[-3;2)\cup(5;+\infty)$. **639.** Не могло. **641.** а) $x_n=2^n-2$; б) $x_n=\frac{96}{2^n}+2$. **642.** ±162. **645.** $\frac{1}{25}$. **646.** а) $x_n=\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{1}{2}$; б) $x_n=72\left(\frac{2}{3}\right)^n+9$. **647.** В 16 раз. **649.** $x_n=2\cdot3^{n-1}-4^{n-1}$. **651.** а) a_6+6d; б) a_6q^6. **652.** а) $-12{,}5$; $S_3=-36$; б) -24; $S_3=-42$. **653.** а) нет; б) да. **654.** а) $b_n=-3n+1$; $S_5=-40$; б) $b_n=\frac{2}{3}(-3)^n$; $S_5=-122$. **655.** а) $x=3$ или $x=-2$; б) $x=4$. **656.** 18. **657.** 30000 руб., 39299,2 руб. **658.** 252. **659.** 1562. **660.** а) $\frac{23}{99}$; б) $\frac{7}{12}$.

Предметный указатель

Оглавление

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

9 класс

Часть 1 (6+)

Учебник

Ответственный за выпуск *Ю. И. Веслинский*
Художники *П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов*
Художественный редактор *Т. С. Шаляпина*
Технический редактор *Е. В. Бегунова*
Компьютерная верстка *Р. Ю. Шаповалов*
Корректор *О. Б. Андрюхина*

Подписано в печать 08.08.2016. Формат 84х108/16. Объем 11,0 печ. л. 18,48 усл. печ. л.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 1001—1500 экз. (2-й завод). Заказ № 6481.

ООО «С-инфо»
(Издательство «Ювента» — структурное подразделение
и зарегистрированный товарный знак ООО «С-инфо»)

121059 Москва, а/я 88 **Телефон:** (495) 796-92-93 **Факс:** (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru **Адрес в Интернете:** www.books.si.ru

Отпечатано в типографии ООО «Буки Веди»
119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4, стр. 1 А
Тел.: (495) 926-63-96, www.bukivedi.com, info@bukivedi.com